CWI
P.O. Box 4079, 1009 AB Amsterdam, The Netherlands
Telephone 31 -20 592 9333, telex 12571 (mactr nl),
telefax 31 -20 592 4199

CWI is the nationally funded Dutch institute for research in Mathematics and Computer Science.

CWI Syllabus 29

Hoeken en hun maat

A.G. van Asch
F. van der Blij

Centrum voor Wiskunde en Informatica
Centre for Mathematics and Computer Science

ISBN 90 6196 407 5
NUGI-code: 811

Voorwoord

In deze studie willen we enkele beschouwingen samenvatten over de definitie, de invoering en de meting van hoeken. We beperken ons tot hoeken in het platte vlak, maar niet alleen hoeken tussen rechte lijnen zullen beschouwd worden. Al bij Euclides vinden we opmerkingen over de hoek tussen een cirkelboog en de daaraan rakende rechte lijn.
In het beginnend meetkunde onderwijs beperkt men zich als regel tot hoeken tussen rechte lijnen. Bovendien worden, gezien de meetkundige context gewoonlijk alleen scherpe, rechte en stompe hoeken behandeld. Maar bij het onderzoek van vierhoeken komen ook inspringende hoeken naar voren. Zodra we goniometrische funkties invoeren komt de behoefte georiënteerde hoeken te bezien.
Een meer algemene behandeling van de geometrische funkties vraagt dan om behandeling met de eenheidscirkel.

De studie is verdeeld in twee hoofdstukken, het eerste behandelt in hoofdzaak hoeken, in het tweede gaan we in op de definitie van de goniometrische funkties.

De verschillende paragrafen zijn grotendeels los van elkaar te lezen, sommige zijn van meer didaktische aard, in het bijzonder als het gaat om de invoering van hoek en hoekmaat en de goniometrische funkties.
Andere paragrafen hebben een veel hogere abstractie graad, in het bijzonder die paragrafen waarin we samenvatten hoe in het beroemde boek "Eléments de Mathématique" van N. Bourbaki, waar de formele verzamelingsleer uitgangspunt van de opbouw van de wiskunde is, hoeken en hun maat worden ingevoerd. Maar deze paragrafen kunnen zonder bezwaar bij eerste lezing worden overgeslagen.

Met deze studie richten we ons zowel tot docenten in het voortgezet onderwijs als tot wiskunde studenten, die belangstelling hebben voor een wat bredere achtergrond van bepaalde onderwerpen uit de wiskunde. Veel van de aangestipte onderwerpen kunnen stimuleren tot eigen werkzaamheid van de lezer, in geen enkele paragraaf is het aan de orde gestelde onderwerp uitputtend behandeld.
Het typewerk werd op voortreffelijke wijze verzorgd door Anneliese Vermeulen-Adolfs op de Technische Universiteit Eindhoven, waarvoor onze dank.

A.G. van Asch
F. van der Blij

Inhoud

Hoofdstuk 1 Hoeken

§0. Inleiding

Het begrip hoek is een centraal begrip in de elementaire Euclidische meetkunde. Aan de invoering van het begrip hoek is in de meeste schoolboeken veel aandacht besteed. De definities lopen nogal uiteen; soms is een hoek slechts het (al dan niet geordende) samenstel van twee halflijnen met een gemeenschappelijk beginpunt. Maar dan is een inspringende hoek en de daarbij passende uitspringende hoek niet te onderscheiden. Hoe definiëren we het binnengebied van een hoek? Wanneer taartpunten en vogelbekken in het onderwijs als model voor de hoek benut worden, welke definitie van hoek ligt daar dan achter?
Felix Klein gaat in zijn "Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus" uit van de draaiing, en voert de hoek van de draaiing als een reëel getal in.
In de eerste paragraaf geven we een aantal voorbeelden van manieren waarop men in schoolboeken het begrip hoek heeft ingevoerd.
In de tweede paragraaf geven we een aantal vrij willekeurig gekozen opmerkingen van didaktische aard over de introduktie van het hoekbegrip weer. Daarna schetsen we in enkele lijnen de opbouw van de hoek volgens Bourbaki. Hierbij worden vrij abstracte noties uit de verzamelingenleer benut.
Men kan deze paragraaf overslaan zonder dat de verder lectuur in het gedrang komt.
Enkele punten uit de "geschiedenis van de hoek" worden in §4 aan de hand van citaten met enig kommentaar aan de orde gesteld. Het is geen volledige beschrijving van de ontwikkeling van het hoekbegrip. Vrij uitvoerig wordt aandacht besteed aan de Elementen van Euclides.
In de laatste paragraaf komt de hoek tussen gebogen lijnen, en de maat daarvan aan de orde.
In de dagelijkse definitie van de grootte van een hoek is de hoek tussen een cirkelboog en de daaraan rakende rechte lijn gelijk aan nul. Maar in de tekening en in een naïeve opvatting van "hoek" is er wel degelijk sprake van een hoek, en zelfs ligt het voor de hand bij twee van zulke hoeken "nul" over groter en kleiner te spreken. Hoe kiest men dan een betere hoekmaat?

§1. Het hoekbegrip in schoolboeken

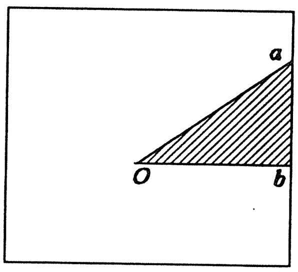
Voor het begrip hoek liggen intuïtief een drietal aspekten voor de hand:

- het draaiïngsaspekt; in het ene geval wordt over een grotere hoek gedraaid dan in het andere,
- het ruimte-aspekt; een hoek van de kamer, "een ongeluk zit in een klein hoekje",
- het materiële aspekt; een (vaak rechte) hoek die van een stuk papier wordt afgescheurd, het vouwen van een hoek met behulp van een blad papier.

Problemen kunnen ontstaan wanneer je precies probeert vast te leggen, probeert te definiëren wat je onder een hoek verstaat. Het is dan gebruikelijk om één van die aspekten uit te kiezen, en dat als uitgangspunt voor een definitie te nemen. In het voortgezet onderwijs is het dan zeer goed denkbaar dat er een situatie ontstaat waarin een leerling een hoekbegrip krijgt opgedrongen dat niet past in het intuïtieve schema "hoek" dat zich reeds ontwikkeld heeft. Een schema dat mogelijkerwijs juist is opgebouwd rond andere aspekten van het begrip hoek. En als "ervaren hoekgebruiker" kun je vrij gemakkelijk van het ene aspekt naar het andere overstappen, kun je in een bepaalde situatie wel de goede keuze maken. Dit is echter een vaardigheid die van leerlingen, zeker in het beginstadium, niet verwacht mag worden.
In §2 wordt aandacht geschonken aan hier mee samenhangende didaktische problemen. In deze § volgen een aantal voorbeelden van manieren waarop men in schoolboeken het begrip hoek heeft vastgelegd. Het betreft hier allemaal schoolboeken van na 1940. Uiteraard zijn het slechts voorbeelden, het is geen volledige opsomming. In bijna alle gevallen is er voor gekozen het stukje tekst waar het om gaat (vrijwel letterlijk) uit het desbetreffende boek te halen en hier weer te geven. Alleen in het laatste voorbeeld (Wiskunde-lijn) spelen de plaatjes een dermate grote rol dat er enkele fragmenten uit het boek gecopieerd zijn.

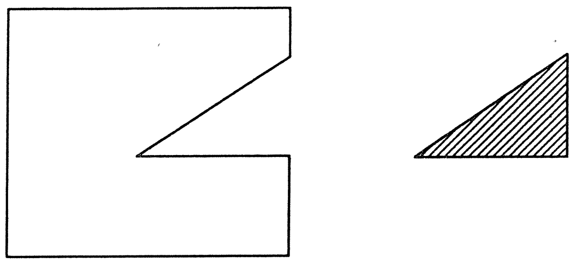
Uit: *Intuïtieve Meetkunde, Inleiding tot de Meetkunde* (zie [6]):

> Twee halve rechten Oa en Ob, met dezelfde oorsprong verdelen het platte vlak in twee gebieden. Het gearceerde gebied ligt tussen beide rechten, en noemen we een hoek.



Figuur 1

Het gebied van het vlak dat niet gearceerd is kan ook als een hoek beschouwd worden. We kunnen de twee gebieden die door de halve rechten in het vlak werden bepaald met de schaar uitsnijden:



Figuur 2

De tweede hoek heet een convexe of uitspringende hoek, de eerste een concave of inspringende hoek.

In deze benadering is een hoek dus duidelijk een tastbaar iets. Opmerkelijk is dat onmiddellijk ook inspringende hoeken worden beschouwd.

Uit: *Leerboek der Vlakke Meetkunde, Eerste deel* (zie [20]):

Een deel van een plat vlak dat begrensd wordt door twee halve rechten die van één punt uitgaan noemt men een hoek.

In deze definitie gaat het dus over de ruimte tussen de twee grenslijnen die de hoek bepalen.

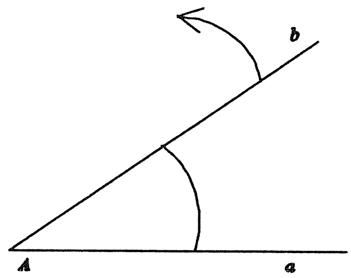
Uit *Nieuwe Vlakke Meetkunde 1* (zie [13]):

De figuur die ontstaat als we een halve rechte om zijn beginpunt laten draaien noemen we een hoek. De begin- en eindstand van de halve rechten noemen we de benen van de hoek. Het gemeenschappelijke beginpunt van de halve rechten noemen we het hoekpunt van de hoek. De benen van een hoek denken we ons onbegrensd.

Dit is dus een voorbeeld waarbij gekozen is voor het draaiïngsaspekt als uitgangspunt. Soms hinkt men ook op twee gedachten, zoals uit het volgende voorbeeld blijkt.

Uit *Grondslag voor de Meetkunde* (zie[4]):

Hier zie je een hoek getekend:



Figuur 3

A heet hoekpunt, *a* en *b* de benen van de hoek.

Draai je het bovenste been in de richting van de pijl dan wordt de hoek groter.

Het boogje wekt hier duidelijk de suggestie dat het om een gebied, begrensd door twee rechte lijnen, gaat, terwijl het pijltje iets dynamisch suggereert.
In recentere schoolboeken treffen we eenzelfde diversiteit aan.

Uit *Sigma 1*, (zie [2]):

Een hoek heeft een hoekpunt en twee benen. De benen zijn halve lijnen. Ze hebben het hoekpunt als eindpunt. Aan de andere kant gaan ze steeds door.

In *Moderne Wiskunde 1*, (zie 18]), wordt niet expliciet vastgelegd wat een hoek is. Op grond van een aantal voorbeelden in min of meer realistische contexten moet de leerling zelf het begrip "hoek" zich eigen maken. Wel staat in de inleiding van het hoofdstuk over hoeken:

Een hoek ontstaat bijvoorbeeld in het uitvoeren van een draai.

En in de voorbeelden wordt nogal nadrukkelijk met een klok gewerkt; de hoek is ontstaan doordat de ene wijzer ten opzichte van de andere een draai gemaakt heeft.

Nadat op de ene of andere manier is vastgelegd wat onder een hoek verstaan moet worden, is een volgende stap dat hoeken gemeten gaan worden. Daarbij kunnen zich o.a. de volgende problemen/vragen voordoen:

- de lengte van de benen van een hoek is niet van belang?

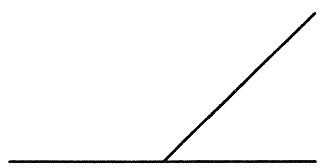
- hoe kunnen hoeken onderling vergeleken worden; met name ook: wanneer zijn twee hoeken gelijk?
- hoe worden scherpe, stompe, inspringende hoeken gedefinieerd?
- hoe wordt een geschikte hoekmaat gedefinieerd?

Er volgen nu een aantal voorbeelden waarin de stap naar het meten van hoeken gemaakt wordt.

Uit *Intuïtieve Meetkunde, Inleiding tot de Meetkunde*:

> Twee hoeken vergelijk je door ze op elkaar te leggen. Twee hoeken zijn gelijk als ze precies op elkaar vallen. De som van twee hoeken is de hoek die je krijgt door ze tegen elkaar te leggen.

In dit boek werd een hoek gedefinieerd als iets wat je uit kunt knippen, en dus is het op elkaar passen van hoeken een logisch vervolg. Over de lengte van de benen wordt nergens gesproken. Op natuurlijke wijze wordt in het boek vastgelegd wat onder $n\times$ en $\frac{1}{n}\times$ een hoek verstaan moet worden (n een natuurlijk getal). Naast het begrip hoek wordt het begrip nevenhoek ingevoerd:



hoek en nevenhoek

Figuur 4

> Een hoek die gelijk is aan zijn nevenhoek heet een rechte hoek.

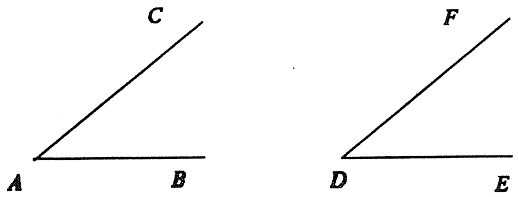
Een rechte hoek is dus de helft van een gestrekte hoek.

> Een hoek die kleiner is dan een rechte hoek heet een scherpe hoek. Een hoek die groter is dan een rechte hoek heet een stompe hoek.

Aanvankelijk wordt de rechte hoek als een eenheid gekozen; elke hoek wordt uitgedrukt in "zoveel maal een rechte hoek". Later wordt hiervan afgestapt en volgt de graad als eenheid: 1° is het negentigste deel van een rechte hoek.

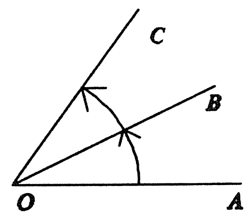
Uit *Nieuwe vlakke meetkunde 1* (met als uitgangspunt het draaiingsaspect van een hoek):

$\angle A = \angle D$ als we door een verplaatsing $\angle A$ in een stand kunnen brengen waarin het been AC met DF samenvalt, en het been AB met DE.



Figuur 5

(In deze definitie van hoek zit wel duidelijk dat de benen in principe onbegrensd zijn). De som van twee hoeken krijg je door "doordraaien"

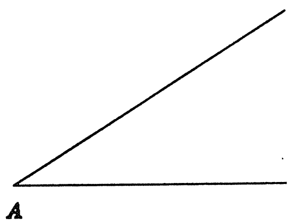


Figuur 6

Een gestrekte hoek is een hoek die je krijgt door zo ver door te draaien tot de benen in elkaars verlengde liggen. Een hoek die gelijk is aan zijn nevenhoek (aanvulling tot een gestrekte hoek) heet een rechte hoek.
Scherpe resp. stompe hoeken zijn hoeken die kleiner resp. groter dan een rechte hoek zijn.
Een hoekmaat is de graad: het negentigste deel van een rechte hoek.

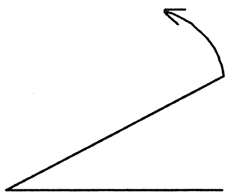
Uit *Wegwijzer in de meetkunde 1* (zie[5]):

Je ziet twee halfrechten getekend die in hetzelfde punt A hun uiteinde hebben:



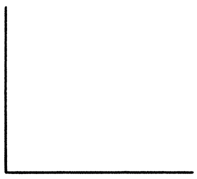
Figuur 7

Zo'n figuur heet een hoek
(in deze definitie zit het onbegrensd zijn van de benen)
Hoeken worden als volgt vergeleken:



Figuur 8

Draaien we het bovenste been in de richting van de pijl dan wordt de hoek groter.
En op een gegeven moment krijg je zo'n hoek:

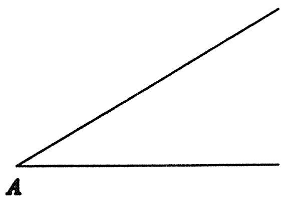


Figuur 9

Dit noemen we dan een rechte hoek. Komen bij nog verder doordraaien de benen in elkaars verlengde dan spreken we van een gestrekte hoek.
Scherpe resp. stompe hoeken zijn hoeken die kleiner resp. groter zijn dan een rechte hoek.
Het meten van hoeken gebeurt in graden: 1° is het honderdtachtigste deel van een gestrekte hoek. Een rechte hoek is de helft van een gestrekte hoek, en dus 90°.

Uit *Sigma 1*:

Een gestrekte hoek is een hoek waarvan de benen in elkaars verlengde liggen. Een rechte hoek is de helft van een gestrekte hoek. Hoeken die kleiner zijn dan een rechte hoek heten scherpe hoeken. Hoeken die groter zijn dan een rechte hoek heten stompe hoeken. De gestrekte hoeken rekenen we niet bij de stompe hoeken.
Hoeken meten:
om hoeken te meten gebruik je een geodriehoek.



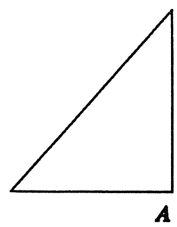
Figuur 10

> Je wilt weten hoe groot hoek A is. Dan leg je de geodriehoek op hoek A. De lange kant van de geodriehoek leg je op het ene been van hoek A. Het middel van de lange kant, waar het cijfertje 0 bij staat, leg je op A. Op de geodriehoek zie je twee kringen getallen. Kijk naar de buitenste kring. Het andere been van hoek A gaat door een streepje, b.v. 54. Je zegt dan dat de grootte van de hoek 54° is.
> Je ziet zo in het bijzonder:
> de grootte van een rechte hoek is 90°,
> de grootte van een gestrekte hoek is 180°.

Vervolgens wordt ook uitgelegd hoe je de grootte van een stompe hoek meet. En er wordt geconstateerd dat één graad het 180-ste deel van een gestrekte hoek is.
In *Moderne Wiskunde 1* wordt het vergelijken van hoeken geïntroduceerd met de volgende opdracht:

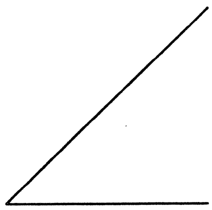
> Zet de wijzers van jouw klok op twee uur. Zet daarna de wijzers op kwart voor drie. In welk geval was de hoek het grootst.

Een rechte hoek wordt ingevoerd met behulp van een tekendriehoek.
De hoek bij A is een rechte hoek.



Figuur 11

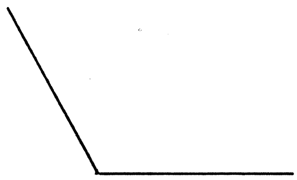
Hoek E is kleiner dan de rechte hoek. We noemen hoek E een scherpe hoek



E

Figuur 12

Hoek F is groter dan de rechte hoek. We noemen hoek F een stompe hoek.



F

Figuur 13

Als je hoeken wilt meten kun je je geodriehoek gebruiken. Op die geodriehoek is een rechte hoek in 90 hoekjes verdeeld.
We zeggen: een rechte hoek wordt gevormd door 90 hoekjes van één graad.

Opmerkelijk is dat nadat is uitgelegd hoe hoeken gemeten kunnen worden al snel opdracht wordt gegeven hoeken van 270° en 450° te tekenen. Dit laatste aan de hand van een opdracht waarin over het ventiel van een fietswiel dat over een hoek van 450° gedraaid is wordt gesproken. Dit geeft nog eens aan dat uitgangspunt voor het hoekbegrip in Moderne Wiskunde het draaiïngsaspekt is.

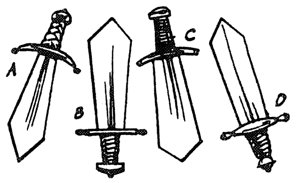
Aan het eind van deze § besteden we nog enige aandacht aan *Wiskundelijn 1b*, (zie[3]).

Er wordt hier niet precies vastgelegd wat een hoek is. Wel wat gelijke hoeken zijn: twee dolkpuntshoeken zijn gelijk als ze in dezelfde sleuf passen. De lengte van de benen doet er niet toe. Het gaat kennelijk om het massieve hoekpunt: er wordt alleen gesproken over de hoek van de dolk, en niet over de hoek van de sleuf. De sleuf wordt gebruikt om de hoeken te vergelijken: de ene dolk heeft een kleinere hoek dan een andere wanneer je ruimte overhoudt als je deze dolk in de sleuf van de andere plaatst.

Hoeken

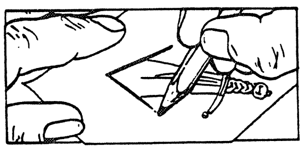
1
Ridder Albrecht bewaart zijn dolken in een rek.

Hier is het lege rek.



En hier zijn de dolken.

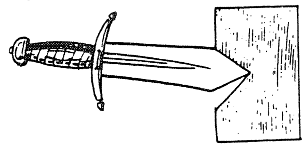
Trek de punt van dolk A over met overtrekpapier. Op welke sleuf past de overgetrokken punt?



Schrijf op: Dolk A past in sleuf ...

Op dezelfde manier zoek je de sleuven voor de andere dolken.

3

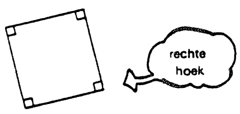


Deze dolk past niet in de sleuf. De hoek van de dolkpunt is *te klein*.

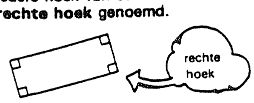
Rechte hoeken worden aangewezen als hoeken die optreden bij vierkanten, rechthoeken en tekendriehoeken.

Rechte hoeken

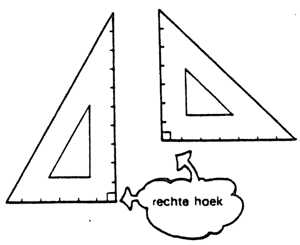
4



Iedere hoek van een vierkant wordt een **rechte hoek** genoemd.



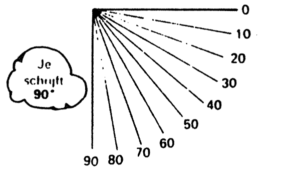
Iedere hoek van een rechthoek is een **rechte hoek**.



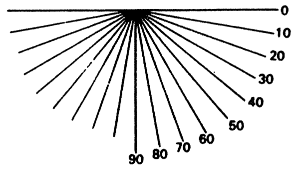
Een tekendriehoek heeft in één hoekpunt een **rechte hoek**.

Als hoekmaat wordt de graad ingevoerd:

90 graden vormen een rechte hoek.

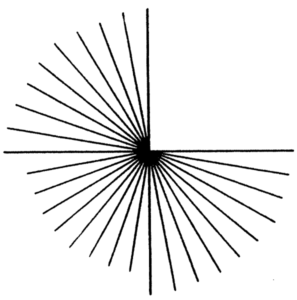


Als je nog 90 graden bij een rechte hoek doet, heb je twee rechte hoeken.



(a) Hoeveel graden gaan er in twee rechte hoeken?

Als je er weer 90 graden bij doet, krijg je drie rechte hoeken.

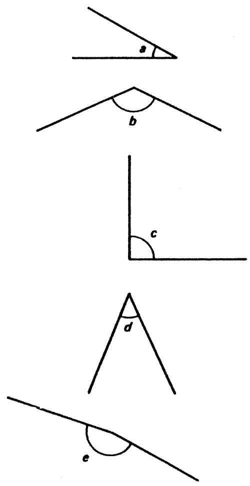


(b) Hoeveel graden gaan er in drie rechte hoeken?

Als je nog eens 90 graden toevoegt, krijg je vier rechte hoeken.

(c) Hoeveel graden gaan er in vier rechte hoeken?

7



(a) Schrijf de letters van deze hoeken op in de volgorde van klein naar groot.
(b) Op hoeveel graden schat jij de hoeken?

§2. Enkele didaktische kanttekeningen

Uit Van Dale, Groot Woordenboek der Nederlandse taal, 11^e druk:

HOEK

1. als wetenschappelijke term (meetk.): de onbepaalde ruimte, begrepen tussen twee rechte lijnen of tussen twee of meer vlakken die elkaar ontmoeten
2. (in het dag. leven) de ruimte binnen twee vertikale wanden waar die elkaar ontmoeten; in het bijz. in een huis: de hoeken van een kamer
3. (vaak in verkleinvorm) afgelegen, verborgen plaats: een schilderachtig hoekje
4. oord, streek: de wind zit al lang in die hoek, Achterhoek
5. door samenkomende vlakken gevormde (uitstekende) punt: stoot niet tegen de hoek van de tafel
6. in het water uitstekende landtong, kaap: de Hoek van Holland
7. puntig uiteinde van een plat vlak: de hoeken van de bladeren zijn omgekruld
8. (afgescheiden) stuk (grond): een hoekje bouwland
9. (hoek)plaats, plekje: hou dit hoekje voor mij open
10. (gew.) een eind weg: een hoek met iemand meegaan
11. haak aan een hengel enz. waaraan de visser het aas bevestigt
12. te Rotterdam brigadier van politie
13. hoekslag, hoekstoot

In sommige schoolboeken wordt precies gedefinieerd wat een hoek is, in andere, met name veel recenter boeken gebeurt dat niet. In 1937 schreef Van der Waerden het boekje "*De logische grondslagen der Euklidische meetkunde*" (zie [22]), weerslag van een college voor toekomstige docenten. Het was bedoeld om de kloof te overbruggen tussen de analytische en projektieve meetkunde die de student op de universiteit leert, en de elementaire axiomatisch opgebouwde Euklidische meetkunde die hij als leraar later op school moest onderwijzen. Van der Waerden gaat uit van vier begrippen en vier relaties, die alle aan de ruimtevoorstelling worden ontleend. Het gaat om de begrippen punt, lijn, vlak en verplaatsing en de relaties "P ligt op l", "P ligt in α", "Q ligt tussen P en R" en "$\mathcal{V}$ voert P over in Q". Een verplaatsing moet men zich dan voorstellen als een verschuiving gepaard met één of meer wentelingen om lijnen in de ruimte.
Vanuit deze grondbegrippen en relaties wordt een aantal axioma's geformuleerd, die verdeeld worden in verbindings-axioma's, ordenings- axioma's en congruentie-axioma's. Ook deze axioma's worden aan de aanschouwing ontleend. Met behulp van deze axioma's worden definities gegeven en stellingen afgeleid, er wordt een deductief systeem opgebouwd.
In het bijzonder wordt een hoek gedefinieerd: een (uitspringende) hoek met hoekpunt A is een paar halve lijnen met hetzelfde eindpunt A, die niet op één lijn liggen.

Een punt ligt binnen $\angle BAC$, indien het in het vlak ABC aan dezelfde zijde van AC als B en aan dezelfde zijde van AB als C ligt.
Van der Waerden merkt dan op dat er didaktisch niets op tegen is het binnengebied van een hoek (te definiëren met de "tussen"-relatie) "hoek" te noemen, zoals dat in veel schoolboeken gebeurt. Hij geeft echter vanuit axiomatisch oogpunt de voorkeur aan de bovenstaande hoekdefinitie, omdat die eenvoudiger is, en niet op axioma's berust.
Vervolgens wordt o.a. de volgende stelling bewezen:

Stelling. Ligt D binnen $\angle BAC$ dan snijdt de halve lijn AD het lijnstuk BC.
(B en C zijn punten op de benen van een hoek met hoekpunt A).

Als voorbeeld van een situatie waarin na het maken van nette afspraken (definities, axioma's) nieuwe resultaten kunnen worden afgeleid is dit prima. De bewering in bovenstaande stelling is echter volstrekt evident en zal absoluut bij niemand vragen oproepen. Van der Waerden signaleert dit ook:

> Wij hebben achtereenvolgens 5 axioma's en 16 stellingen geformuleerd die alle aanschouwelijk evident zijn, en die bijna alle zonder uitdrukkelijke formulering in het onderwijs als vanzelfsprekend verondersteld worden. Moet men nu al die stellingen in de klas bewijzen of ze alle als axioma's uitdrukkelijk formuleren? Dit zou het meetkunde-onderwijs naar mijn mening ontzettend vervelend maken. Vanzelfsprekende stellingen interesseren geen normale leerling noch in de eerste, noch in de vijfde klas. En door het doceren van vervelende stof kan het doel van het wiskunde-onderwijs, onverschillig hoe men dit doel stelt, nooit worden bereikt. Om deze reden houd ik een streng-axiomatische opbouw der schoolmeetkunde, waarbij niets dan de axioma's aan de aanschouwing wordt ontleend, zoals die door Dr. Dijksterhuis (Epistemisch Wiskunde-onderwijs, Euclides 10) voor de hogere klassen werd verdedigd, voor onuitvoerbaar. Men versta mij wel: ik neem geen stelling tegen het uitstekende beginsel van "epistemisch wiskunde-onderwijs" zoals dat door Dr. Dijksterhuis wordt bepleit. Dit beginsel laat, zoals Dr. Dijksterhuis zelf zegt, ruimte voor "een hele scala van opvattingen die tussen het standpunt van Mevr. Ehrenfest en dat van Schogt als uitersten liggen". Ik neem alleen stelling tegen een zover doorgevoerde axiomatisering dat bij de bewijzen "geen direct beroep meer wordt gedaan op evidente voorstelling".

Van der Waerden wil dus toekomstige docenten confronteren met een formeel deductief bouwwerk der Euklidische meetkunde, maar hij benadrukt tegelijkertijd dat dit voor de schoolsituatie onwenselijk is.

Op de vraag "wat is meetkunde op het laagste niveau?" geeft Freudenthal in [15] als antwoord:

> "Geometry is grasping space. And since it is about the education of children, it is grasping that space in which the child lives, breathes and moves".

De meetkunde die op het laagste niveau geleerd wordt moet nauw aansluiten bij de ons omringende wereld. Meetkundige begrippen moeten beslist niet via definities ingevoerd worden.

Freudenthal merkt op dat in de traditionele meetkunde men zelfs definieerde wat een definitie was. Hij beschrijft vrij uitvoerig twee formeel wiskundig juiste methoden om een hoekbegrip in te voeren.
Enerzijds in een vektorruimte met inprodukt via

$$\sphericalangle \underline{x}\,,\underline{y} = \arccos \frac{(\underline{x}\,,\underline{y})}{|\underline{x}|\,|\underline{y}|}\ .$$

Anderzijds door uit te gaan van het vlak, voorzien van een orthonormale basis, en daarin de draaiingsgroep te beschouwen. Draaiingen zijn dan de lineaire afbeeldingen van het vlak op zichzelf, waarvan de matrix t.o.v. de orthonormale basis de vorm

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ heeft met } \alpha^2 + \beta^2 = 1\ .$$

Beide introdukties van het hoekbegrip werken natuurlijk alleen maar onder de veronderstelling van voorkennis rond het begrip hoek, en van goniometrische funkties. Het is dan ook niet een invoering van het begrip op basis-niveau, maar een reorganisatie die verdergaande mogelijkheden biedt. Voor wat betreft het invoeren van het hoekbegrip op basisniveau benadrukt Freudenthal dat er meerderde hoekbegrippen zijn, en dat het van een slechte wiskundige houding getuigt om slechts één hoekbegrip als het enige juiste aan te wijzen.
Hij onderscheidt in de eerste plaats het door Euclides gedefinieerde hoekbegrip in de elementaire vlakke meetkunde door middel van halflijnen. Hoeken hebben een grootte die varieert van 0° tot 180°. Hoeken kunnen worden opgeteld, tot zelfs een grootte "groter dan twee rechte hoeken", het resultaat van een dergelijke optelling is in deze context dan geen hoek meer. In de goniometrie wordt een ander hoekbegrip gehanteerd. Een hoek wordt opgevat als een centrale hoek in een eenheidscirkel. De grootte van de hoek correspondeert met de lengte van de boog waarop de hoek staat. Door middel van een oriëntatie van het vlak volgens de draairichting van de wijzers van de klok kennen we aan deze hoeken een oriëntatie toe. Ook negatieve hoeken komen daardoor voor. Door op de eenheidscirkel cirkelbogen zichzelf te laten overlappen krijgt men bogen langer dan 2π, dus hoeken groter dan 2π. Zonodig kunnen hoeken modulo 2π geïdentificeerd worden. In de analytische meetkunde gaat het om de hoek tussen een geordend paar recht lijnen. Hoeken worden hier bepaald modulo π. In de ruimte-meetkunde treedt een hoek op als kleinste hoek tussen twee snijdende lijnen; er wordt geen rekening gehouden met een oriëntatie en hoeken hebben een grootte van 0° tot 90°. En tenslotte is er het hoekbegrip in de analyse: daar treden hoeken op als argumenten voor de goniometrische funkties sinus en cosinus. Hoeken corresponderen met reële getallen, en hebben dus waarden tussen $-\infty$ en ∞.
Freudenthal benadrukt vervolgens dat met name de elementaire-meetkunde-hoek, de goniometrie hoek en de analyse-hoek alle drie natuurlijke begrippen zijn, geen van drieën kan gemist worden. Ze moeten in een vroeg stadium, en naast elkaar geïntroduceerd worden. De leerling leert dan van begin af aan dat er meerdere hoekbegrippen zijn (zoals de leerling gezien de opsomming aan het begin van deze § waarschijnlijk al vermoedde).

In [19] onderscheidt Kemme met betrekking tot het hoekbegrip:

– hoeken als verschijnsel; waarneembaar zoals b.v. bij de wijzers van een klok, indirekt waarneembaar zoals b.v. bij een verkeersbord op de snelweg dat groter lijkt te worden naarmate we dichterbij komen,

- hoeken als instrument; met hoeken kun je dingen maken, relaties beschrijven, verschijnselen verklaren.

In het huidige wiskunde-onderwijs speelt het toepassen van de wiskunde in praktische situaties een grote rol. Het ontwikkelen van het hoekbegrip uitsluitend omwille van het kunstmatige wiskundige bouwwerk bestaande uit abstracte begrippen en onderlinge relaties past daar niet in. Het gaat om het leren hanteren van het begrip als konkreet verschijnsel, zowel als abstract object, in een onderlinge samenhang. Kemme spreekt van het leren vanuit een ambachtelijke optiek: laten zien wat het gereedschap is, wat de methoden zijn, en wat je ermee kunt doen. Op de vraag: hoe leg je uit wat een hoek is als het woord al zo'n duidelijke betekenis heeft? wordt vanuit deze optiek het antwoord gegeven dat zo'n uitleg vooral het karakter zal hebben van een uitleg-wat-je-met-een-hoek-kunt-doen. Het gaat niet om een formalistische uitleg, er hoeft niet ondubbelzinnig, in relatie met eerder formeel gedefinieerde begrippen vastgelegd te worden wat een hoek is.
Kemme geeft nog een voorbeeld waartoe een formele definitie van het hoekbegrip, gebaseerd op slechts één aspekt, kan leiden. Als zo'n definitie als uitgangspunt het draaiings-aspekt is, dan kan een eenvoudige zin als "hij draaide over een hoek van 30° niet meer. Dat zou dan moeten zijn: hij draaide over een draai van 30°.

In §1 zijn voorbeelden gegeven van het invoeren van het hoekbegrip in een aantal uiteenlopende schoolboeken. Zo op het eerste gezicht levert dat geen problemen op. In deze paragraaf is er stil gestaan bij het feit dat er aan het hoekbegrip toch nog wel wat didaktische haken en ogen zitten. Het definiëren van het begrip hoek volgens streng wiskunde regels is een gecompliceerde zaak; enkele door Freudenthal geopperde mogelijkheden zijn vermeld. In de serie Eléments de Mathématique van N. Bourbaki wordt de wiskunde axiomatisch opgebouwd. De volgende paragraaf is een bewerking van een hoofdstuk uit deze serie. Het is bedoeld om aan te geven hoe een formele opbouw van het hoekbegrip er uit zou kunnen zien. Er blijken abstracte begrippen uit de verzamelingenleer nodig te zijn om tot een bevredigende hoekdefinitie te komen. Het is een op zichzelf staande paragraaf die desgewenst zonder enig bezwaar kan worden overgeslagen.

§3. Hoeken volgens Bourbaki

Nadat Bourbaki op de klassieke wijze vektorruimtes over $\mathbb{R}$, voorzien van een inprodukt heeft ingevoerd, wordt vervolgens in [8] een hoekbegrip geïntroduceerd. In deze paragraaf wordt in grote lijnen dit verhaal uit Bourbaki gevolgd.
Laat E een 2-dimensionale vectorruimte over $\mathbb{R}$ zijn, voorzien van een inprodukt $\Phi(x, y)$.
Een bijectieve lineaire afbeelding $u : E \to E$ met de eigenschap $\Phi(u(x), u(y)) = \Phi(x, y)$ voor alle x, $y \in E$ heet een *orthogonale afbeelding.*
De coëfficiënten van de matrices van orthogonale afbeeldingen voldoen aan een aantal relaties.
Laat $\{e_1, e_2\}$ een orthonormale basis van E zijn, d.w.z. $\Phi(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.
Een orthogonale afbeelding u heeft t.o.v. deze basis een matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

Uit $\Phi\big(u(e_i), u(e_j)\big) = \Phi(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ volgt

$$\begin{cases} \alpha^2 & +\beta^2 & = 1 \\ \gamma^2 & +\delta^2 & = 1 \\ \alpha\gamma & +\beta\delta & = 0 \end{cases}$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en dus is $\big(\det(u)\big)^2 = 1$, dus $\det(u) = \pm 1$.

Het is duidelijk dat de orthogonale afbeeldingen een groep vormen, de orthogonale groep; notatie $\mathcal{O}$.
$\mathcal{O}^+ = \{u \in \mathcal{O} \mid \det(u) = 1\}$ is een ondergroep van $\mathcal{O}$. De elementen van $\mathcal{O}^+$ noemen we *draaiingen.*
Voor de coëfficiënten van de matrix van $u \in \mathcal{O}^+$ geldt, naast de relaties voor een willekeurige orthogonale afbeeldingen, ook nog

$$\det(u) = 1 \ .$$

Het is gemakkelijk in te zien dat

$$\alpha = \delta \quad \text{en} \quad \beta = -\gamma \ .$$

Dus elke $u \in \mathcal{O}^+$ heeft ten opzichte van een orthonormale basis $\{e_i, e_2\}$ een matrixvoorstelling

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

waarbij $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ en $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.
Het is ook niet moeilijk in te zien dat elke matrix van deze vorm een draaiing voorstelt.

Propositie 1.
Als $x, y \in E\backslash\{0\}$, en $\Phi(x, x) = \Phi(y, y)$, dan is er precies één $u \in \mathcal{O}^+$ met $u(x) = y$.

Bewijs
Vanwege het lineair zijn van u is het voldoende het bewijs te leveren voor het geval $\Phi(x, x) = \Phi(y, y) = 1$. Neem $z \in E$, met $\Phi(z, x) = 0$ en $\Phi(z, z) = 1$. Dan is $\{x, z\}$ een orthonormale basis voor E, dus in het bijzonder

$$y = \alpha\, x + \beta\, z$$

Laat u de lineaire afbeelding zijn die ten opzichte van de basis $\{x, z\}$ de matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

heeft.
Dan is duidelijk dat $u(x) = y$.
Bovendien geldt

$$\det(u) = \alpha^2 + \beta^2 \ ,$$

dus $\det(u) = 1$ vanwege $\Phi(y, y) = 1$, dus $u \in \mathcal{O}^+$.
De uniciteit volgt uit het feit dat door de eis $u(x) = y$ de eerste kolom van de matrix van u (ten opzichte van de basis $\{x, z\}$) vastligt, en dus ook de tweede kolom.

Vervolgens wordt het begrip *halfrechte* ingevoerd. Laat $x \in E$, $x \neq 0$, dan heet

$$[x] = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0\}$$

een halfrechte (met beginpunt in 0).

Propositie 2
Laten D_1 en D_2 halfrechten zijn, dan is er precies één $u \in \mathcal{O}^+$ met $u(D_1) = D_2$.

Bewijs
Dit volgt onmiddellijk uit Prop. 1. Kies namelijk $x \in D_1$ en $y \in D_2$ met $\Phi(x, x) = \Phi(y, y)$, dan is er precies één $u \in \mathcal{O}^+$ met $u(x) = y$. En omdat u lineair is volgt $u(D_1) = D_2$.

Bekijk nu geordende paren halfrechten (D_1, D_2). Tussen dergelijke paren definiëren we een relatie $\sim$ als volgt:

$$(D_1, D_2) \ \sim \ (D_1', D_2') \Longleftrightarrow \text{ er is } u \in \mathcal{O}^+ \text{ met } u(D_1) = D_1' \text{ en } u(D_2) = D_2' \ .$$

Uit het feit dat $\mathcal{O}^+$ een groep is volgt gemakkelijk dat $\sim$ een equivalentie-relatie is.
De equivalentie-klasse van (D_1, D_2) wordt als $\angle(D_1, D_2)$ genoteerd en dit wordt de *hoek van de halfrechten* D_1 en D_2 genoemd.

Opmerking
De bewijzen van de nu volgende Proposities 3, 4 en 5 zijn zeer elementair; ze zijn voor de volledigheid opgenomen.

Propositie 3
De bewerking $\angle(D_1, D_2) + \angle(D_3, D_4) = \angle(D_1, u(D_4))$, waarbij $u \in \mathcal{O}^+$ met $u(D_3) = D_2$, is een goed gedefinieerde optelling in de verzameling van alle hoeken tussen halfrechten.

Bewijs
Aangetoond moet worden dat de gedefinieerde bewerking niet afhangt van de gekozen representanten. Laat $\angle(D_1, D_2) = \angle(D'_1, D'_2)$, $\angle(D_3, D_4) = \angle(D'_3, D'_4)$. Er zijn dus $v, w \in \mathcal{O}^+$ met $v(D_1) = D'_1$, $v(D_2) = D'_2$, en $w(D_3) = D'_3$, $w(D_4) = D'_4$.
$\angle(D'_1, D'_2) + \angle(D'_3, D'_4) = \angle(D'_1, u'(D'_4))$, waarbij $u'(D'_3) = D'_2$.
Uit $v\,u(D_3) = D'_2 = u'\,w(D_3)$ volgt $v\,u = u'\,w$, (uniciteit van een draaiing die D_3 op D'_2 afbeeldt) en dit impliceert
$v\,u(D_4) = u'\,w(D_4) = u'(D'_4)$.
Samen met $v(D_1) = D'_1$ geeft dit
$(D_1, u(D_4)) \sim (D'_1, u'(D'_4))$, dus
$\angle(D_1, u(D_4)) = \angle(D'_1, u'(D'_4))$.

We zien hieruit dat we het optellen van hoeken in feite kunnen beperken tot optellingen van het type $\angle(D_1, D_2) + \angle(D_2, D_3) = \angle(D_1, D_3)$.

Propositie 4
De verzameling $\mathcal{H}$ van alle hoeken tussen halfrechten is met de gedefinieerde bewerking een abelse groep.

Bewijs
Associativiteit volgt gemakkelijk door uitschrijven. We tonen nu commutativiteit aan.
$\angle(D_1, D_2) + \angle(D_2, D_3) = \angle(D_1, D_3)$
$\angle(D_2, D_3) + \angle(D_1, D_2) = \angle(D_2, u(D_2))$ waarbij $u(D_1) = D_3$.
Er is $v \in \mathcal{O}^+$ met $v(D_1) = D_2$.
En omdat de groep $\mathcal{O}^+$ commutatief is volgt

$$v(D_3) = v\,u(D_1) = uv(D_1) = u(D_2)$$

Dus $(D_1, D_3) \sim (D_2, u(D_2))$ dus $\angle(D_1, D_3) = \angle(D_2, u(D_2))$, waarmee de commutativiteit is aangetoond.
$\angle(D, D)$ is neutraal element:
$\angle(D_1, D_2) + \angle(D, D) = \angle(D_1, D_2) + \angle(D_2, D_2) = \angle(D_1, D_2)$. En elk element in $\mathcal{H}$ heeft een tegengestelde in $\mathcal{H}$: $\angle(D_1, D_2) + \angle(D_2, D_1) = \angle(D_1, D_1)$.

Propositie 5
De afbeelding $h : \mathcal{H} \to \mathcal{O}^+$ gedefinieerd door $h(\angle(D_1, D_2)) = u$, waarbij $u(D_1) = D_2$, is een isomorfisme.

Bewijs
We moeten eerst aantonen dat h goed gedefinieerd is. Stel dus $\angle(D_1, D_2) = \angle(D_1', D_2')$. Er is dan $v \in \mathcal{O}^+$ met $v(D_1) = D_1'$ en $v(D_2) = D_2'$. Laat bovendien $u(D_1) = D_2$ en $u'(D_1') = D_2'$, dus $v^{-1}\, u'\, v = u$. En dus $u' = u$ omdat $\mathcal{O}^+$ commutatief is. Dit betekent $h(\angle(D_1, D_2)) = h(\angle(D_1', D_2'))$.
Als $u(D_1) = D_2$, en $v(D_2) = D_3$, dan is $v\,u(D_1) = D_3$, en dus
$h(\angle(D_1, D_2) + \angle(D_2, D_3)) = h(\angle(D_1, D_3)) = v\,u = uv = h(\angle(D_1, D_2))\, h(\angle(D_2, D_3))$, dus h is een groepshomomorfisme.
Als $h(\angle(D_1, D_2)) = i$ (i is de identieke afbeelding), dan is $D_2 = D_1$, m.a.w. $\angle(D_1, D_2)$ is dan het neutrale element van $\mathcal{H}$. De kern van h bevat dus alleen het neutrale element waaruit volgt dat h injectief is.
Surjectiviteit volgt ook gemakkelijk: origineel van $u \in \mathcal{O}^+$ is $\angle(D, u(D))$.

We bekijken nog enkele speciale elementen in $\mathcal{H}$.
Noem $H = [e_1]$, $V = [e_2]$.
Voor elke hoek $\angle(D_1, D_2)$ in $\mathcal{H}$ is er een halfrechte D zò dat $\angle(D_1, D_2) = \angle(H, D)$.
$\angle(H, -H)$ is een element van orde 2 in $\mathcal{H}$:
$\angle(H, -H) + \angle(H, -H) = \angle(H, -H) + \angle(-H, H) = \angle(H, H)$.
Bovendien:
$\angle(H, V) + \angle(H, V) = \angle(H, V) + \angle(V, -H) = \angle(H, -H)$.
Dus $\angle(H, V)$ is een element van orde 4 in $\mathcal{H}$.

We laten nu zien hoe een maat voor de elementen van $\mathcal{H}$ kan worden ingevoerd. Daarbij wordt alvast gebruik gemaakt van de bekende reële funkties $\cos t$ en $\sin t$ (waarop nog uitvoeriger wordt teruggekomen). Elke $\angle(D_1, D_2)$ correspondeert met precies één $u \in \mathcal{O}^+$, en dus met één matrix van de vorm

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

waarbij $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (matrix t.o.v. $\{e_1, e_2\}$). Bij dergelijke α, β is er precies één $t \in [0, 2\pi)$. zò dat $\cos t = \alpha$ en $\sin t = \beta$.
Op deze manier kunnen we dus elk element uit $\mathcal{H}$ laten corresponderen met precies één reële $t \in [0, 2\pi)$. Dit geeft de mogelijkheid om in de verzameling hoeken een orde-relatie aan te brengen:

$$\angle(H, D_1) < \angle(H, D_2) \Longleftrightarrow t_1 < t_2 \; .$$

$h(\angle(H, V) = u$, waarbij u de matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ heeft.

Dit betekent dat $\angle(H, V)$ correspondeert met $t = \frac{1}{2}\pi$. Een hoekmaat $\mu(\angle(H, D))$ kan als volgt gedefinieerd worden. Kies voor $\mu(\angle(H, V))$ een willekeurig positief getal, en definieer voor een willekeurige hoek

$$\mu(\angle(H, D)) = \frac{t}{\frac{1}{2}\pi}\, \mu(\angle(H, V)) \; .$$

De funkties sin t en cos t zijn periodiek met periode 2π. Elk element van $\mathcal{H}$ kunnen we dan ook laten corresponderen met een nevenklasse in $\mathbb{R}$ mod 2π, in plaats van één, ondubbelzinnig bepaalde $t \in [0, 2\pi)$. Nemen we dit als uitgangspunt, dan wordt de gedefinieerde hoekmaa additief.

§4. Geschiedenis

In deze paragraaf bekijken we hoe op een paar momenten in de geschiedenis van de wiskunde het hoekbegrip aan de orde gesteld werd. Het is geen weergave van de ontwikkeling van het hoekbegrip door de eeuwen heen, het zijn enkele momentopnames.
We beginnen met de Elementen van Euclides. Veel van de gegevens daarover zijn ontleend aan de boeken "De Elementen van Euclides" van E.J. Dijksterhuis (zie [14]). Euclides leefde rond 300 v. Chr. in Alexandrië, en zijn naam is vooral verbonden aan één van de beroemdste werken in de geschiedenis van de wiskunde: de Elementen. De wiskundige inhoud van de Elementen gaat op vroegere auteurs terug; de grote verdienste van Euclides is dat hij veel aanwezige, maar verspreide wiskundige kennis hier op systematische wijze gebundeld heeft.
Boek I begint met een reeks "bepalingen" (definities in onze terminologie); we laten er een aantal volgen (met de nummering uit [14]):

I Een punt is wat geen deel heeft.

II Een lijn is een breedteloze lengte.

III De uiteinden van een lijn zijn punten.

IV Een rechte lijn is een lijn die gelijk ligt met de punten erop.

V Een vlak is wat alleen lengte en breedte heeft.

VII Een plat vlak is een vlak dat gelijk ligt met de lijnen erop.

VIII Een vlakke hoek is de helling tot elkaar van twee lijnen in een plat vlak die elkaar ontmoeten, en die niet op een rechte liggen.

IX Wanneer de lijnen die de hoek omvatten, rechte lijnen zijn, heet de hoek rechtlijnig.

X Wanneer een rechte, op een rechte staande, de aan elkaar grenzende hoeken aan elkaar gelijk maakt is elk der gelijke hoeken recht, en de opstaande lijn heet de loodlijn op die waarop ze staat.

XI Een stompe hoek is een hoek die groter is dan een rechte.

XII Een scherpe, die kleiner is dan een rechte.

In de tijd van Euclides was de gangbare opvatting over een definitie dat deze niets hoefde te zeggen over het bestaan van het gedefinieerde; een definitie beantwoordt slechts de vraag wat het is, en niet de vraag of het er is. Het is niet helemaal duidelijk wat Euclides in definities IV en VII met "gelijk liggen" bedoelde. Het meest aannemelijke is dat hij gedacht heeft aan een praktische methode om rechtheid of platheid vast te stellen: je kijkt met het oog langs het te onderzoeken lijn of het te onderzoeken vlak. Op definitie VIII is veel kritiek geweest. Veel schrijvers hebben er op gewezen dat zo'n definitie eigenlijk niet kan: de definitie gebruikt impliciet het te definiëren begrip; immers, wat is "de helling tot elkaar"? We komen hier later nog op terug.

Na de definities komen er axioma's:

I Dingen, gelijk aan hetzelfde, zijn ook gelijk aan elkaar.

II En als men bij gelijke dingen gelijke voegt zijn de totalen gelijk.

III En als men van gelijke dingen gelijke afneemt zijn de resten gelijk.

IV En indien men aan ongelijke dingen gelijke toevoegt zijn de totalen ongelijk.

V En dingen die het dubbele van hetzelfde zijn, zijn aan elkaar gelijk.

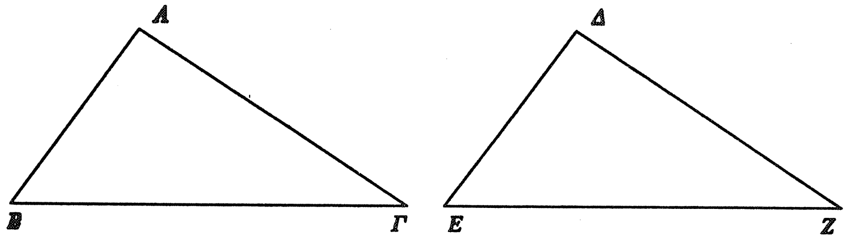
VI En dingen die de helft van hetzelfde zijn, zijn aan elkaar gelijk.

VII En dingen die op elkaar passen zijn gelijk.

VIII En het geheel is groter dan het deel.

In het bijzonder zijn dus twee hoeken gelijk wanneer ze op elkaar passen. We laten nu enkele voorbeelden volgen van proposities, en bewijzen waarin deze redenering wordt toegepast.

Propositie IV
Indien twee driehoeken twee zijden aan twee zijden gelijk hebben één aan één en de door de gelijke rechten ingesloten hoek gelijk hebben aan de hoek zullen ze ook de basis gelijk hebben aan de basis en de driehoek zal gelijk zijn aan de driehoek en de overige hoeken zullen gelijk zijn aan de overige hoeken één aan één, waaronder de gelijke zijden zich spannen.
Bewijs.

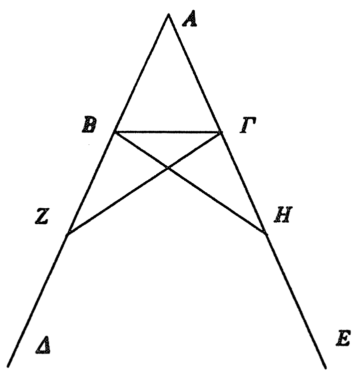


Figuur 14

Want wanneer driehoek $AB\Gamma$ wordt gepast op driehoek ΔEZ en wanneer het punt A op het punt Δ gelegd wordt en de lijn AB op ΔE zal ook het punt B op E passen door het gelijk zijn van AB en ΔE. Daar nu AB op ΔE paste zal ook de lijn $A\Gamma$ op ΔZ passen, wegens het gelijk zijn van de hoek $BA\Gamma$ aan de hoek $E\Delta Z$. Zodat ook het punt Γ op het punt Z zal passen, weer door het gelijk zijn van $A\Gamma$ aan ΔZ. Maar zeker paste ook B op E, zodat de basis $B\Gamma$ op de basis EZ zal passen en er aan gelijk zal zijn. Zodat ook de hele driehoek $AB\Gamma$ op de hele driehoek ΔEZ zal passen en er aan gelijk zal zijn en de overige hoeken zullen op de overige hoeken passen en zullen er aan gelijk zijn, $AB\Gamma$ aan ΔEZ, $A\Gamma B$ aan ΔZE.

Propositie V
Van de gelijkbenige driehoeken zijn de hoeken aan de basis aan elkaar gelijk en wanneer de

gelijke lijnen verlengd zijn zullen de hoeken onder de basis aan elkaar gelijk zijn.



Figuur 15

Laat $AB\Gamma$ een gelijkbenige driehoek zijn waarin $AB = A\Gamma$ en laat de rechten $B\Delta$ en ΓE getrokken zijn als verlengden van AB en $A\Gamma$.
Beweerd wordt: $\angle AB\Gamma = \angle A\Gamma B$
$\angle \Gamma B\Delta = \angle B\Gamma E$

Kies op $B\Delta$ een willekeurig punt Z. Neem van AE, die groter is dan AZ, een stuk $AH = AZ$ af. Trek BH en ΓZ. Daar $AZ = AH$, $A\Gamma = AB$, terwijl $\angle ZA\Gamma = \angle HAB$ is
$Z\Gamma = HB$, $\Delta\ AZ\Gamma = \Delta\ AHB$, $\angle\ A\Gamma Z = \angle\ ABH$, $\angle AZ\Gamma = \angle AHB$ (dit volgt uit propositie IV).
Uit $AZ = AH$ en $AB = A\Gamma$ volgt $BZ = \Gamma H$.
Daar $BZ = \Gamma H$, $Z\Gamma = HB$ en $\angle BZ\Gamma = \angle \Gamma HB$ is:
$\Delta BZ\Gamma = \Delta \Gamma HB$, $\angle ZB\Gamma = \angle H\Gamma B$, $\angle B\Gamma Z = \angle \Gamma BH$ (dit volgt uit propositie IV).
Wegens $\angle ABH = \angle A\Gamma Z$ en $\angle \Gamma BH = \angle B\Gamma Z$ is $\angle AB\Gamma = \angle A\Gamma B$ (volgens axioma III).
Ook is reeds bewezen: $\angle ZB\Gamma = \angle H\Gamma B$.

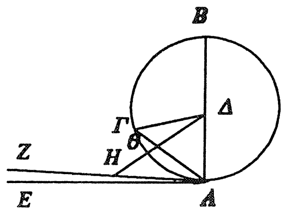
Wat in dit bewijs ook opvalt is dat uit de gelijkheid van de hoeken $ZB\Gamma$ en $H\Gamma B$ niet onmiddellijk de gelijkheid van de basishoeken wordt geconcludeerd. Euclides kende nl. niet het begrip gestrekte hoek. Gezien definitie VIII is dat ook niet zo verwonderlijk: twee lijnen die in elkaars verlengde liggen hebben geen helling t.o.v. elkaar.

In definitie IX wordt apart het begrip "rechtlijnige hoek" vastgelegd; definitie VIII laat toe dat de benen van een hoek ook niet-rechte lijnen kunnen zijn. In Boek III komen dergelijke hoeken op een paar plaatsen voor. Als gebogen benen van een hoek treden alleen cirkelbogen op. Boek III begint ook weer met een aantal definities, die nu alle betrekking hebben op de cirkel. Hier volgen er twee:

- Een cirkelsegment is de figuur, omvat door een rechte en de omtrek van een cirkel.
- De hoek van een segment is de hoek omvat door een rechte en een cirkelboog.

Hier is dus sprake van een hoek waarvan één been een rechte lijn is, en het andere een cirkelboog. In de volgende propositie uit Boek III komt een dergelijke hoek voor.

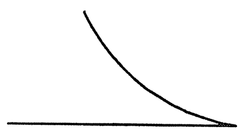
Propositie XVI
De rechte, onder een rechte hoek met de middellijn van een cirkel uit een uiteinde van deze getrokken, zal buiten de cirkel vallen, en in de ruimte tussen de rechte en de cirkelomtrek zal geen andere rechte vallen en de hoek van de halve cirkel is groter dan elke scherpe rechtlijnige hoek, de overblijvende kleiner.
Bewijs.



Figuur 16

Stel voor dat de lijn, in A loodrecht op AB, niet buiten de cirkel valt, maar dat $A\Gamma$ loodrecht staat op AB , Γ ligt op de cirkel. Omdat $\Delta\Gamma = \Delta A$ is $\triangle\Delta A\Gamma$ gelijkbenig en dus is $\angle\Delta\Gamma A = \angle\Delta A\Gamma$. Echter een driehoek met twee rechte hoeken is onmogelijk.
(N.B. Euclides bewees al eerder dat de som van de hoeken van een driehoek gelijk is aan twee rechte hoeken). Dus de lijn AE, loodrecht op AB, valt buiten de cirkel.
Tussen AE en de cirkelboog $A\Theta\Gamma$ kan geen rechte getrokken worden. Want stel dat dit wel kan, en dat AZ zo'n rechte is. Trek nu de loodlijn ΔH uit Δ op AZ. Dan is $\Delta A > \Delta H$.
(N.B. Euclides bewees al eerder dat in een driehoek tegenover een grotere hoek een grotere zijde ligt). Maar omdat $\Delta\Theta = \Delta A$ zou dus $\Delta\Theta > \Delta H$. Omdat H buiten de cirkel ligt is dit in tegenspraak met axioma VIII.
Dus tussen AE en de cirkelboog $A\Theta\Gamma$ kan geen andere rechte getrokken worden.
Stel nu dat er een scherpe rechtlijnige hoek is die groter is dan de hoek van de halve cirkel. Dan zou er een rechte lijn getrokken kunnen worden tussen AE en de cirkelboog $A\Theta\Gamma$ en dat is onmogelijk zoals is bewezen.
Met dezelfde redenering bewijst men dat $\angle EA\Gamma$ kleiner is dan elke rechtlijnige hoek.

Deze propositie is de enige plaats in het werk van Euclides waar hij aandacht schenkt aan een zogenaamde hoornvormige hoek:



Figuur 17

Vermoedelijk heeft Euclides dit slechts om historische redenen opgenomen. Toch duikt in beschouwingen over de hoek-definitie zoals Euclides die gaf dit verschijnsel nogal eens op. Van de vele commentaren die er over de Elementen geschreven zijn is de belangrijkste die van Proclos (410-485). Zij commentaar op definitie VIII:

Sommigen noemen hoek een relatie die lijnen of vlakken met elkaar hebben, anderen noemen het een eigenschap net zoals recht of gebogen, en weer anderen noemen het een grootheid. Tegen al deze opvattingen zijn bezwaren in te brengen. Immers alle grootheden hebben een bepaalde verhouding tot elkaar. Dus als een hoek een grootheid is dan moeten alle hoeken een bepaalde verhouding tot elkaar hebben; in het bijzonder ook hoornvormige hoeken en rechtlijnige hoeken. Maar dit is in tegenspraak met Propositie XVI. En als een hoek een eigenschap is, hoe kan het dan b.v. in twee gelijke delen verdeeld worden?
En als een hoek een relatie is, hoe kan het dan dat als twee lijnen deze relatie hebben er toch zeer verschillende hoeken zijn?
Laten we ons verstand gebruiken en vaststellen dat een hoek op zich geen van de drie genoemde dingen is, maar bestaat als een combinatie van deze drie. Hierdoor stuit ieder die een hoek als één van deze drie wil definiëren op problemen.

Tot zover besteden we aandacht aan de Elementen. We maken dan een sprong naar de 14^e eeuw, naar Nicole Oresme (1323-1382). Oresme was een Franse theoloog die het uiteindelijk tot bisschop van Lisieux bracht. Daarnaast leverde hij belangrijke bijdragen aan de ontwikkeling van de wiskunde. Vermoedelijk was hij de eerste die naast gehele en rationale ook irrationale machten (b.v. $x^{\sqrt{2}}$) beschouwde. Bovendien kwam hij met het voor die tijd revolutionaire idee om een grafiek te tekenen van de manier waarop dingen, zoals snelheid, temperatuur, veranderen. Rond 1350 was hij als docent verbonden aan de Parijse Faculteit der Kunsten, en gaf hij daar een reeks voordrachten over de Elementen. Deze zijn later op schrift gesteld onder de titel "Quaestiones super Geometriam Euclides". Het werk bestaat uit 21 vragen; op elke vraag volgt een uitvoerige beschouwing met beweringen en voorbeelden. Speciaal van belang zijn nu die vragen die over het begrip hoek gaan. Er volgen enkele fragmenten, die zijn overgenomen uit "Nicole Oresme, Quaestiones super Geometriam Euclides", proefschrift van H.L.L. Busard (zie [9]).

56.35 Next the question is asked whether an angle is a quality.
57.1 This seems not to be so, for it is divisible *per se* as regards its quantity (a science even, *viz.* mathematics, is concerned with this); therefore it is a quantity, not a quality.
The opposite is argued as follows: a figure is of the genus quality, therefore so is an angle[1]).
57.6 Remark: An angle is a genus and is subdivided as follows: There is an *angulus corporalis*, which is formed by surfaces, and an *angulus superficialis*, which is formed by lines. The *angulus superficialis* in turn can be divided into an *angulus planus*, which is formed in a plane figure, and an *angulus curvus*, which is formed on a curved surface, such as a sphere. the *angulus planus* in turn can be divided into an angle which is formed by two straight lines, one which is formed by a straight and a curved line, or one which is formed by two curved lines. From two straight lines an angle is formed in only one way; from a straight and a curved line, in two ways, for the curved line may be concave as well as convex; from two curved lines, in three ways, for they are both concave, or convex, or one is concave and the other convex. The first kind is divided into right, acute and

[1]As his fourth variety of *quality*, Aristotle had given figure and the shape subsisting in each thing, and, besides these, straightness, curvature, and the like.

obtuse angles; the second kind (when the curved line is concave) into an *angulus maioris portionis* and an *angulus minoris portionis*, *i.e.* into one which is greater or one which is less than a right angle, but never into one which is equal to it (Fig. 52). When the curved line is convex, into an *angulus contingentiae* (horn-like angle) and an *angulus non-contingentiae*. The *angulus non-contingentiae*, as well as the *angulus contingentiae*, in turn is divided into one which is greater and one which is less than a right angle. None of these angles, however, can be equal to a right angle.
Finally, the three ways in which an angle is formed from two curved lines have to be discussed. An angle formed by two concave lines (Fig. 53) is divided into one which is greater and one which is less than a right angle. However, none can be mentioned which is equal to a right angle.

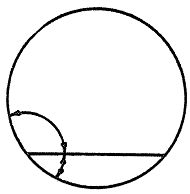


Fig. 52

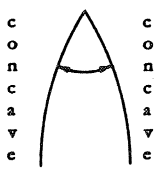


Fig. 53

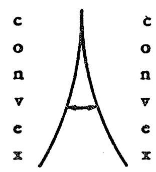


Fig. 54

An angle formed by two convex lines is divided into an *angulus contingentiae* of two circles (Fig. 54) and an *angulus non- contingentiae, e.g.* when two circles intersect.
When the angle is formed by a concave and a convex line, the latter may have different curvatures. In this case an angle can be mentioned which is greater or less than, but never one which is equal to, a right angle. However, when they have the same curvature, the angle may be less than as well as equal to a right angle.
57.33 I now give one conclusion: to describe an angle formed by

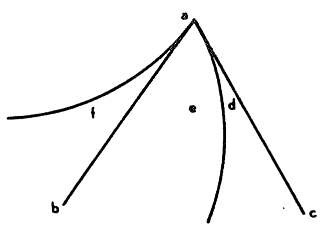
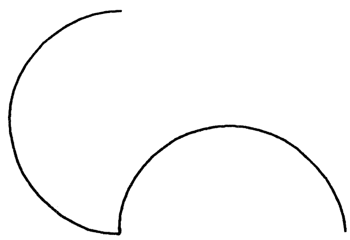


Fig. 55

curved lines, which is equal to a rectilineal angle. Example: if the rectilineal angle $b\ a\ c$ is given, it is possible to construct a circle which touches $a\ c$ at a and a circle of equal size which touches $a\ b$ at a. Three angles d, e and f are thus formed (Fig. 55). Now the argument is as follows: d and f are equal because they are horn-like angles upon equal circles. Angle $e\ f$, consisting of two curved lines, will thus be equal to angle $d\ e$, consisting of two straight lines, if to d as well as f is added angle e, which $d\ e$ and $e\ f$ have in common.

De benen van een hoek kunnen dus gebogen lijnen zijn. Expliciet wordt vermeld dat in het geval één of beide benen gebogen lijnen zijn, er maar één situatie is waarin sprake kan zijn van een rechte hoek, namelijk



Figuur 18

waarbij de beide lijnen in het hoekpunt dezelfde kromming hebben. Hierna volgt een uitvoerige verhandeling waarin met tal van wijsgerige argumenten wordt betoogd dat een hoek een "quality" is. Vervolgens komt Oresme bij de vraag "Wat is een hoek?"

62.21 Next it is asked: What is an angle?
Without counter-arguments I posit the following conclusions:
Conclusion I: An angle is not a surface.

(a) It is not divided with any division of the surface, nor does it increase when the surface increases or decrease when the surface decreases. Any two unequal surfaces may further have equal angles (right angles, for instance). Accordingly it would have to be conceded that things which are equal as angles are unequal as surfaces, and many other assertions of this kind. Although all this might be defended with the aid of logic, it seems to meet with no response among mathematicians and is therefore merely a probability-argument, although it is not sound. All the consequences easily become apparent.
(b) When two lines meet in a point and are produced any distance on the other side, there is an angle indeed, but no surface, because it cannot be stated how great it is. In Euclid's *Elements*, too, it is apparent that two straight lines do not enclose a space.

Conclusion II: an angle is not a number of meeting lines in a point, nor the meeting-point itself.

(a) The lines can be divided while the angle is not, nay more: the angle can be divided while the lines remain undivided.
(b) Just as an angle which is formed from the meeting of lines would be a number of lines, so an *angulus corporalis* would be a number of surfaces. In the same way as previously, the opposite might be argued.
(c) It is also asserted that lines form a figure. Because a figure is plane and lines are not, one must therefore say that lines are the same thing as angles.

Conclusion III: An angle does not belong to the category of relation.

(a) If it is imagined that such a relation in itself is a thing, it can be proved that such a relative something does not differ from an absolute something, and it would therefore have to be indicated what sort of thing an angle is. I accept the antecedent for the moment; later this will become apparent, when it is asked what a ratio is.
(b) From the definition of "the relative" it appears that an angle is no relation, because an angle is not said to be in a ratio to something else.
(c) In conclusion I say: the purely relative can be acquired or lost because something else changes, not because the subject which is denominated by it changes, as Aristotle says in *Metaphysica* IV and appears sufficiently through induction. In fact, a man may be called father without himself changing, etc. However, angles cannot realize this without a change of the body or the surface to which they belong.

Conclusion IV: It is likely that an angle is the mutual contact of two lines or similar things in a point. Accordingly I say that it is an accident; not one which expresses an essence, such as whiteness, but one which expresses a *sic esse, e.g.* a surface is so acute, the term "acute" being taken in the sense of any meeting of lines.

Het is aardig om de in de conclusies genoemde kenmerken te vergelijken met de hoek-definities van bijvoorbeeld Euclides, en de definities uit de schoolboeken in §1.

Vervolgens staan we stil bij de figuur van Petrus Ramus (1515-1572). De gegevens zijn ontleend aan het proefschrift "Petrus Ramus en de Wiskunde" van J.J. Verdonk, uit 1966. Vanaf 21-jarige leeftijd was Ramus aan verschillende instellingen in Frankrijk leraar (lecteur) in de vrije kunsten: grammatica, retorica, filosofie, astronomie, mechanica, optica, musica, fysica, ethica. In dit geheel was in de 16^e eeuw de wiskunde minimaal vertegenwoordigd. Door bestudering van de Elementen raakte Ramus geïnteresseerd en enthousiast, en hij gaf hieruit jaren lang les in de wiskunde. Rond 1545 verscheen van zijn hand een uitgave van de Elementen. De uitvoering was zo eenvoudig mogelijk gehouden: het was de bedoeling de studenten aan een goedkoop handboek te helpen. Ook figuren en commentaren waren weggelaten. Hiermee streefde Ramus ook een didaktisch doel na: een levende uitleg tijdens de lessen werd als waardevoller beschouwd dan geschreven commentaren. Bovendien heeft een leerling er meer aan zelf tekeningen te maken dan naar het werk van anderen te kijken. Naarmate hij langer werkte met de Elementen, en zelf verder kwam met de bestudering van de verschillende boeken (speciaal vanaf boek X, waarin veel bewijzen geleverd worden) begon hij ook steeds meer kritiek hierop te krijgen. Deze kritiek richtte zich op de methoden van

Euclides, op de volgorde van de onderwerpen, maar vooral ook op de uitgangspunten van de Elementen. Ramus verweet Euclides dat deze wiskunde op een zeer abstract niveau bedreef, waar het vaak alleen ging om de wiskunde op zich. Ramus pleitte er bij voortduring voor dat wetenschappen toepasbaar moeten zijn. Wiskunde moet een abstractie van het stoffelijke zijn. Hij definieert de meetkunde dan ook als volgt:

> Meetkunde is de kunst om goed te meten.

Vanuit zijn eigen visie ging Ramus er toe over zelf wiskunde-leerboeken te schrijven. In 1569 verscheen de eerste uitgaven van "Geometria", waarin hij de meetkunde behandelt. Dit werk bestond uit 27 boeken, waarin in de eerste vier aan de orde komen: grootheid, lijn, hoek, figuur.
Elk boek is onderverdeeld in genummerde uitspraken. We laten er nu een aantal volgen om een indruk te krijgen van de manier waarop Ramus met het hoekbegrip omging.
Allereerst wordt in boek 1 omschreven wat grootheid is:

> Wat voorgesteld wordt om goed te meten, is de grootheid.

Dit sluit dus aan bij de definitie die Ramus van de meetkunde gaf. Nadat er een aantal dingen over grootheden zijn opgemerkt wordt in boek 2 vastgelegd wat een lijn is:

> Een lijn is een slechts lange grootheid.

En omdat Ramus een grootheid in verband brengt met meten is bij hem een lijn (recht of krom) altijd begrensd, dus een lijnstuk.
Vervolgens voert Ramus het begrip "lineatum", door Verdonk vertaald met "het gelijnde", in. Hieronder wordt verstaan "datgene waarin lijnen zijn", en dat zijn vlakken of lichamen. Letterlijk definieert Ramus:

> Het gelijnde is grootheid die meer is dan lang.

Ramus onderscheidt in de meetkunde als enige grootheden lijnen, vlakken en lichamen. In boek 3 wordt de volgende hoek-definitie gegeven:

> Hoek is het gelijnde in de gemeenschappelijke snijding der grenzen.

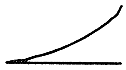
Een vlakke of een ruimtelijke hoek is hier dus in feite een konkreet, stoffelijk iets.

> De benen van de hoek zijn de grenzen die de hoek omvatten.

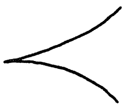
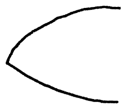
Voor vlakke hoeken betekent dit dat de benen lijnen zijn, dus in de opvattingen van Ramus lijnstukken.
Als je een hoek als een grootheid definieert doet zich onmiddellijk een probleem voor: als je twee grootheden hebt moet je door de één te vermenigvuldigen de ander kunnen overtreffen. En Euclides bewees al dat een hoornvormige hoek kleiner is dan elke rechtlijnige scherpe hoek. Ramus loste dit op door het begrip éénaardige hoek in te voeren.

Eénaardige hoeken zijn hoeken die één zijn van aard in de benen en in de samenloop ervan.

Eénaardig zijn b.v. alle vlakke rechtlijnige hoeken,

of alle vlakke hoeken van de vorm  ,

of alle vlakke hoeken van de vorm  ,

Niet éénaardig zijn b.v.  en  (hol-hol versus bol-bol).

En voor wat betreft de hoek als grootheid moet je alleen eenaardige hoeken met elkaar vergelijken.
Over het gelijk zijn van twee grootheden doet Ramus de volgende twee uitspraken:

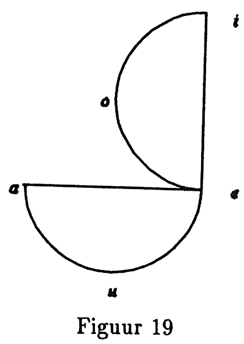
Grootheden zijn congruent wier delen, op elkaar gelegd, gelijke plaats innemen.

Congruente grootheden zijn gelijk.

Met betrekking tot hoeken heeft dit tot gevolg:

Hoeken die met de benen passen zijn even groot.

Ramus merkt op dat het omgekeerde niet waar hoeft te zijn, en illustreert dit met het volgende voorbeeld.



Figuur 19

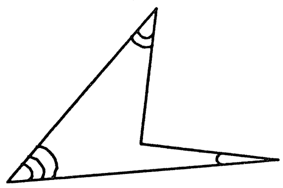
$\angle ieo = \angle aeu$
$\angle ieo + \angle aeo = \angle aeu + \angle aeo$
$\angle aei = \angle ueo$,
maar het is duidelijk dat de benen niet passen.
Het onderling loodrecht zijn van lijnen legt Ramus op een nogal vage manier vast:

Lijnen zijn onderling loodrecht waarvan de één op de ander vallend gelijkelijk tussenschuift.

Wat dat "gelijkelijk tussenschuiven" voorstelt wordt verder niet vermeld. Een rechte hoek wordt vervolgens op voor de hand liggende wijze gedefinieerd:

Recht is een hoek waarvan de benen onderling loodrecht zijn.

Naast rechte hoeken onderscheidt Ramus scherpe en stompe hoeken, maar geen hoeken die groter zijn dan een gestrekte hoek. Dit heeft het merkwaardige gevolg dat een driehoek meer dan drie zijden kan hebben, zoals in het volgende voorbeeld, waarin de inspringende hoek gewoon niet meetelt.



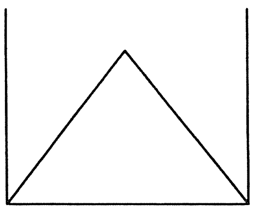
Figuur 20

Omdat deze figuur toch niet datgene is wat gewoonlijk onder een driehoek wordt verstaan wil Ramus liever de term driezijde gebruiken. Vervolgens past hij zich toch maar weer aan, aan het spraakgebruik; hij legt wel expliciet vast dat een driehoek een door drie rechten omvatte figuur is. Met de volgende stelling over de som van de hoeken in een driehoek, en het bewijs dat Ramus daarvoor geeft, zullen we onze beschouwing over het werk van Ramus afsluiten.

De som van de hoeken van een driehoek is gelijk aan tweemaal een rechte hoek.

Ramus geeft hiervoor de volgende redenering:

Richt in de uiteinden van een lijnstuk loodlijnen op. Laat men die loodlijnen nu naar elkaar neigen dan ontstaat er een driehoek, en er komt in de tophoek evenveel bij als er in de basishoeken afgaat. Door die compensatie blijkt de som der drie hoeken gelijk te zijn aan twee rechte hoeken.



Figuur 21

Uit de meer recente geschiedenis mag niet onvermeld blijven Hilbert's "Grundlagen der Geometrie" (zie [17]). In dit werk wordt door Hilbert een rigoureus axiomastelsel gehanteerd. De vraag wat de betekenis van de meetkundige grondbeginselen is, in welke zin de axioma's waar zijn, wordt niet gesteld. Uitgangspunt voor het denken zijn axiomatisch gedefinieerde strukturen.
Hilbert gaat uit van drie verschillende verzamelingen. De objekten van de eerste verzameling worden punten genoemd, die van de tweede lijnen, en die van de derde vlakken. Dit zijn basis-elementen van de meetkunde. Een stelsel van axioma's geeft een volledige beschrijving van de betrekkingen tussen punten, lijnen en vlakken. Na de relationele axioma's (door twee verschillende punten A en B wordt één lijn a bepaald, etc.) volgen de zogenaamde ordeningsaxioma's; deze zijn van belang om het begrip halfrechte te kunnen definiëren. Om een indruk te geven van de grondigheid waarmee een en ander wordt aangepakt volgen hier deze axioma's en enkele daarmee samenhangende definities.

1. Als A, B en C punten op een lijn zijn, en B ligt tussen A en C dan ligt B ook tussen C en A.
2. Als A en C twee punten op een lijn zijn dan is er steeds minstens één punt B dat tussen A en C ligt, en minstens één punt D zó dat C tussen A en D ligt.
3. Als A, B en C drie punten op een lijn zijn dan is er precies één die tussen de beide andere ligt.

Definitie
Als A en B twee punten zijn dan wordt het systeem dat bestaat uit deze beide punten een lijnstuk genoemd, en genoteerd als AB, of BA. De punten die tussen A en B liggen worden de punten van het lijnstuk genoemd.

4. A, B en C zijn drie niet op één lijn gelegen punten; a is een lijn in het vlak ABC, waar A, B en C niet op liggen. Als a door een punt van AB gaat, dan gaat a ook hetzij door een punt van BC, hetzij door een punt van AC.

Definitie
Gegeven zijn vier punten A, A', O, B op een lijn a zó dat O tussen A' en B, maar niet tussen A en A' ligt. We zeggen dan dat A en A' op de lijn a aan dezelfde kant van O liggen, en dat A en B aan verschillende kanten van O liggen. Alle punten op a die aan één en dezelfde kant van O liggen vormen een van O uitgaande halfrechte.

Definitie
Een systeem van lijnstukken AB, BC, CD, ..., KL heet een gebroken lijn die de punten A en L verbindt.

De ingrediënten om vast te leggen wat een hoek is zijn nu aanwezig.

Definitie
Als α een vlak is, en h, k zijn twee verschillende van een punt O uitgaande halfrechten in α, die afkomstig zijn van verschillende lijnen in α, dan noemen we het systeem van deze halfrechten een hoek. We noteren dit als $\sphericalangle(h, k)$ of als $\sphericalangle(k, h)$.

Deze definitie is dus vrijwel dezelfde als die uit Bourbaki in §3. De oriëntatie speelt hier geen rol. Door de eis dat de definiërende halfrechten niet op één lijn liggen worden gestrekte hoeken dus uitgesloten.

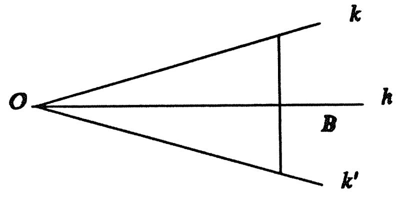
Een hoek $\sphericalangle(h, k)$ verdeelt de punten van α die niet op h of k liggen in twee gebieden. Deze gebieden kunnen als volgt beschreven worden. Als A een punt van het ene gebied, en B een punt van het andere gebied is, dan heeft elke gebroken lijn die A met B verbindt minstens één snijpunt met h of k. Als daarentegen A en A' punten van hetzelfde gebied zijn dan kunnen A en A' verbonden worden door een gebroken lijn die h en k niet snijdt. De beide gebieden kunnen van elkaar worden onderscheiden. In één van de gebieden ligt voor elk tweetal punten A en B ook AB geheel in het gebied. Dit gebied heet het inwendige van de hoek. En het andere gebied heet dan het uitwendige van de hoek.

Het gelijk zijn van twee hoeken wordt door Hilbert als volgt beschreven.
Stel dat in een vlak α een hoek $\sphericalangle(h, k)$ gegeven is. Laat in een vlak α' een rechte a' gegeven zijn. De rechte a' verdeelt α' in twee gebieden; wijs er één van de twee aan: Neem op a' een punt O' en h' is één van de twee halfrechten die door a' en O' bepaald worden. Dan is er in α' één en precies één halfrechte k' met beginpunt O', die in het aangewezen gebied ligt, en zó dat $\sphericalangle(h', k')$ gelijk is aan $\sphericalangle(h, k)$.
Hilbert noteert dit als $\sphericalangle(h', k') \equiv \sphericalangle(h, k)$; hij spreekt zowel over gelijke als over congruente hoeken.
Bovenstaande kan ook korter geformuleerd worden: elke hoek kan in een vlak waarin een halfrechte gegeven is, op eenduidige wijze aan beide kanten van de halfrechte worden afgepast.
Hilbert spreekt dus steeds over vlakke, rechtlijnige hoeken; deze hoeken mogen echter wel in verschillende vlakken liggen.

Definitie
Twee hoeken met gemeenschappelijk hoekpunt die ook nog één been gemeen hebben, en waarvan de andere twee benen een rechte lijn vormen, heten nevenhoeken. Een hoek die met een van z'n nevenhoeken congruent is heet een rechte hoek.

Omdat de aanschouwing geen enkele rol speelt in de uitgangspunten van dit boek is het bestaan van rechte hoeken niet bij voorbaat duidelijk. Hilbert bewijst de existentie van rechte hoeken als volgt:

Neem een willekeurige hoek $\sphericalangle(h, k)$ met hoekpunt O. Pas vervolgens een congruente hoek $\sphericalangle(h, k')$ af (met dus hetzelfde hoekpunt O).



Figuur 22

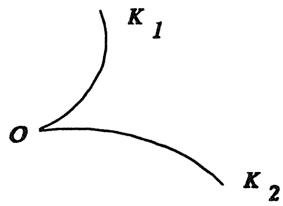
Wijs op k en k' punten A en A' aan zó dat $OA \equiv OA'$ (dit kan volgens het eerste congruentie-axioma). De verbindingslijn AA' snijdt h in een punt B. Volgens een ander congruentie-axioma volgt daaruit dat de nevenhoeken bij B congruent zijn, met andere woorden dat ze beide rechte hoeken zijn.

In het reeds eerder in §2 genoemde boek [22] hanteert Van der Waerden een geheel ander uitgangspunt dan Hilbert. Het is in de eerste plaats een boek voor aanstaande leraren. En in de tweede plaats neemt Van der Waerden als uitgangspunt voor de congruentiestellingen niet het begrip "gelijkheid" maar het begrip "verplaatsing". We besluiten deze paragraaf met een stukje uit de inleiding van [22], waarin commentaar op het werk van Hilbert (en van Dijksterhuis) wordt geleverd.

> De door den Heer Dijksterhuis zozeer verfoeide bewijzen der congruentiestellingen komen bij deze wijze van opbouw weer tot hun recht: het blijkt dat de epitheta "wiskundig waardeloos" en "schijnbewijs" op deze bewijzen slechts dan van toepassing zijn wanneer men uitsluitend aan de axiomatiek van Hilbert denkt, maar niet, wanneer men van de even natuurlijke axiomatiek der Verplaatsingen uitgaat, welke van didactisch standpunt zelfs de voorkeur boven die van Hilbert verdient. Tegenover het argument van Dr. Dijksterhuis, dat men een driehoek niet kan opnemen en weer neerleggen "alsof het een plankje was", stel ik ten eerste, dat men zich een verschuiving of wenteling van een mathematische driehoek precies even goed (of even slecht) kan voorstellen als de driehoek zelf, zonder daarbij aan dikte of materiaal te denken, en ten tweede, dat het begrip verplaatsing zich even goed laat axiomatiseren, resp. in een analytisch opgebouwde meetkunde laat definiëren als alle andere meetkundige begrippen, zodat ook van streng-wiskundig standpunt het gebruik van verplaatsingen in geen enkel opzicht verwerpelijk is.

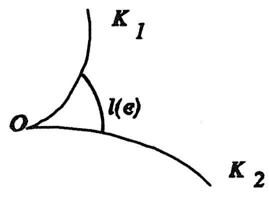
§5. Kromlijnige hoeken

In deze paragraaf besteden we aandacht aan hoeken waarvan de benen gebogen lijnen mogen zijn. We beperken ons tot vlakke hoeken. Grofweg (d.w.z. niet exact gedefinieerd zoals dat b.v. in §3 gebeurde) verstaan we onder de hoek tussen K_1 en K_2 de figuur gevormd door de gebogen lijnen K_1 en K_2 met het gemeenschappelijk hoekpunt O.



Figuur 23

Een eerste vraag is dan of dergelijke hoeken onderling te vergelijken zijn. Zie in dit verband ook Propositie XVI uit de vorige paragraaf. Daar vergelijkt Euclides de hoek tussen een cirkel en een raaklijn daaraan met rechtlijnige hoeken. Een tweede vraag is vervolgens hoe er aan dergelijke hoeken een hoekmaat toegekend kan worden.
We beginnen met deze laatste vraag. We trekken daartoe een cirkel met middelpunt O en (kleine) straal ε.



Figuur 24

De booglengte tussen K_1 en K_2 noemen we $l(\varepsilon)$.
We definiëren vervolgens als hoekmaat voor de hoek tussen K_1 en K_2

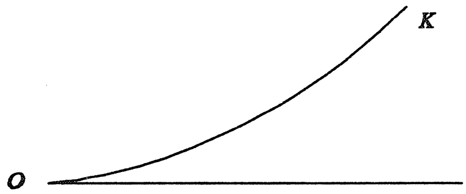
$$\varphi(\varepsilon) = \frac{l(\varepsilon)}{\varepsilon} .$$

De hoekmaat is dus een funktie van ε. We beperken ons tot het geval dat deze funktie een aantal malen differentieerbaar is in een omgeving van $\varepsilon = 0$.
Eenvoudig is in te zien dat deze definitie voor een rechtlijnige hoek (d.w.z. als K_1 en K_2 rechte lijnen zijn) de "gewone" hoekmaat oplevert.
De volgende stellingen volgen ook onmiddellijk.

Stelling $\varphi(\varepsilon)$ is een additieve hoekmaat.

Stelling $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varphi(\varepsilon)$ levert de gewone hoek tussen K_1 en K_2, d.w.z. de hoek tussen de raaklijnen op.

Op grond van deze stellingen beperken we ons voorlopig tot de hoek tussen een kromme en de raaklijn aan die kromme.



Figuur 25

In deze situatie geldt, zoals men eenvoudig kan bewijzen,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varphi(\varepsilon) = 0\,, \qquad \text{en}$$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{1}{2R}\,,$$

waarbij R de kromtestraal van de kromme in O is.
Enkele voorbeelden:

–K is de boog van de cirkel $x^2 + (y - R)^2 = R^2$ in het eerste kwadrant. Gemakkelijk is nu na te gaan dat voor de hoek tussen K en de positieve x-as geldt

$$\varphi(\varepsilon) = \arcsin\left(\frac{\varepsilon}{2R}\right)$$

–K is het deel van de parabool $y = a\,x^2 (a > 0)$ in het eerste kwadrant. Voor de hoek tussen K en de positieve x-as geldt nu

$$\varphi(\varepsilon) = \arcsin\left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4a^2\varepsilon^2}}{2\,a\,\varepsilon}\right)$$

We brengen nu algemeen een (lokaal) coördinatenstelsel, met O als oorsprong, en de positieve x-as langs de raaklijn, aan. Beschouw nu eerst de situatie dat K gegeven wordt door een parameter-voorstelling van de vorm

$$\begin{cases} x = & t + a_2t^2 + a_3t^3 + \ldots \\ y = & \phantom{t + {}} b_2t^2 + b_3t^3 + \ldots \end{cases}$$

waarbij t uit een geschikt gekozen omgeving van 0 genomen wordt.
Een vrij grote klasse van krommen wordt hiermee beschreven. Als K een algebraïsche kromme is, met O als regulier punt, dan bestaat zo'n parametervoorstelling. Dit is ook het geval als K een tak van een algebraïsche kromme, en O een gewoon dubbelpunt is. En als K grafiek is van een in een omgeving van $x = 0$ analytische funktie $f(x)$ dan voldoet de parameter-voorstelling

$$\begin{cases} x = t \\ y = \quad b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots \end{cases}$$

met $b_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

En als K gegeven is in poolcoördinaten door $r = r(\varphi)$ met $r(0) = 0$, dan is een parametrisering in eerste instantie

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi = r'(0)\varphi + \dots \\ y = r(\varphi)\sin\varphi = r'(0)\varphi^2 + \dots \end{cases}$$

Door over te gaan op een nieuwe parameter $t = r'(0)\varphi$ volgt weer een parametervoorstelling van bovenstaande vorm.

We bepalen nu eerst de parameter-waarde die hoort bij het snijpunt van K met de cirkel $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$. Deze waarde van t hangt van ε af, en we stellen

$$t = \varepsilon + \tau_2\varepsilon^2 + \tau_3\varepsilon^3 + \dots$$

Door dit in te vullen in x en y, en vervolgens in $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ zijn de coëfficiënten $\tau_2, \tau_3, \dots$ te bepalen.
Zo is $\tau_2 = -a_2$,
en $\tau_3 = 2a_2^2 - \frac{1}{2}b_2^2 - a_3$, etc.

Stellen we nu

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi_1\varepsilon + \varphi_2\varepsilon^2 + \dots ,$$

dan kunnen we met behulp van

$$\varphi(\varepsilon) = \arcsin\left(\frac{y(t(\varepsilon))}{\varepsilon}\right)$$

de coëfficiënten $\varphi_1, \varphi_2 \dots$ uitdrukken in de a_i en b_j. Enig rekenwerk levert

Stelling

$\varphi_1 = b_2$

$\varphi_2 = b_3 - 2\ a_2 b_2$

$\varphi_3 = 5\ a_2^2 b_2 - 3\ a_2 b_3 - 2\ a_3 b_2 - \frac{5}{6} b_2^3 + b_4$

$\varphi_4 = -14\ a_2^3 b_2 + 9\ a_2^2 b_3 + 12\ a_2 a_3 b_2 + 6\ a_2 b_2^3 - 4\ a_2 b_4 - 3\ a_3 b_3 - 2\ a_4 b_2 - 3\ b_2^2 b_3 + b_5$

$\varphi_5 = 42\ a_2^4 b_2 - 56\ a_2^2 a_3 b_2 + 7\ a_3^2 b_2 + 14\ a_2 a_4 b_2 - 2\ a_5 b_2 - \frac{63}{2}\ a_2^2 b_2^3 + 7\ a_3 b_2^3 + \frac{63}{40}\ b_2^5 - 28\ a_2^3 b_3 +$
$21\ a_2 a_3 b_3 - 3\ a_4 b_3 + \frac{49}{2}\ a_2 b_2^2 b_3 - \frac{7}{2} b_2 b_3^2 + 14\ a_2^2 b_4 - 4\ a_3 b_4 - \frac{7}{2}\ b_2^2 b_4 - 5\ a_2 b_5 + b_6.$

Hieruit zien we dat $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \dfrac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} = \dfrac{1}{2R}$, immers de kromming in een punt van een kromme die in parametervoorstelling is gegeven, is gelijk aan

$$\frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} ;$$

in dit geval levert dat dus $2b_2$ op.
Als de kromme gegeven is door een vergelijking in poolcoördinaten zijn de coëfficiënten voor de machtreeks van $\varphi(\varepsilon)$ vaak eenvoudiger te vinden.
Als nl. $r = F(\varphi)$ (met $F(0) = 0$), dan herschrijven we dit als $\varphi = \tilde{F}(r)$ (met $\tilde{F}(0) = 0$), en dan is

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{l(\varepsilon)}{\varepsilon} = \tilde{F}(\varepsilon) .$$

Zo geven de al eerder genoemde krommen op deze manier:

–de cirkel $x^2 + (y - R)^2 = R^2$ heeft in poolcoördinaten de vergelijking $r = 2R \sin \varphi$, en dus

$$\varphi(\varepsilon) = \arcsin \left(\frac{\varepsilon}{2R} \right)$$

–de parabool $y = ax^2 (a > 0)$ heeft in poolcoördinaten de vergelijking

$$r = \frac{\sin \varphi}{a \cos^2 \varphi} , \quad \text{ofwel}$$

$ar \sin^2 \varphi + \sin \varphi - ar = 0$, waaruit weer volgt

$$\varphi(\varepsilon) = \arcsin \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4a^2\varepsilon^2}}{2a\varepsilon} \right) .$$

De volgende stelling is gemakkelijk te verifiëren.

Stelling

Als de kromme K gegeven wordt door een parametervoorstelling

$$x = t + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots$$
$$y = b_pt^p + b_{p+1}t^{p+1} + \dots \quad (p \geq 2)$$

dan geldt $\varphi_1 = \dots = \varphi_{p-2} = 0$ en $\varphi_{p-1} = b_p$.

We keren nu terug tot het algemene geval van een hoek tussen twee krommen K_1 en K_2. In eerste instantie werd als hoekmaat gedefinieerd de van ε afhankelijke funktie $\varphi(\varepsilon) = \dfrac{l(\varepsilon)}{\varepsilon}$. We kunnen deze identificeren met de rij $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots)$ van de coëfficiënten van de machtreeks

$$\varphi(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i\varepsilon^i .$$

In plaats van deze rij coëfficiënten als een soort absolute hoekmaat te definiëren, kunnen we ook een reeks steeds fijnere hoekmaten definiëren. Hoekmaten worden dan n-tuples, bestaande uit de eerste n coëfficiënten van de machtreeks.
Dan levert (φ_0) de "gewone" hoekmaat,
(φ_0, φ_1) de eerste verfijning,
$(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ de tweede verfijning,
etc.

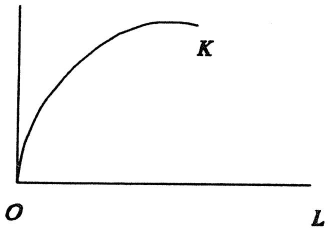
Hoeken ordenen we nu lexicografisch. De volgende generalisatie van een uitspraak van Euclides in Propositie XVI (uit §4) is dan onmiddellijk duidelijk.

Stelling
De hoek tussen een kromme K en een raaklijn aan K is kleiner dan elke niet-triviale rechtlijnige hoek.

En ook het volgende (te verwachten) resultaat volgt onmiddellijk.

Stelling
Als $p > q$ dan maakt de kromme $y = a\ x^p$ $(a > 0)$ een kleinere hoek met de x-as dan de kromme $y = b\ x^q$ $(b > 0, p, q$ gehele getallen, $q \geq 1)$.

We noemen twee krommen K_1 en K_2 onderling loodrecht als $\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2}\pi$. Voor rechte lijnen stemt deze definitie overeen met de normale definitie van loodrechte stand. Een cirkelboog en een rechte lijn kunnen nooit onderling loodrecht zijn. Immers als K een cirkelboog is (straal R) en L een rechte lijn, dan moet in elk geval de raaklijn aan K in O loodrecht op L staan.

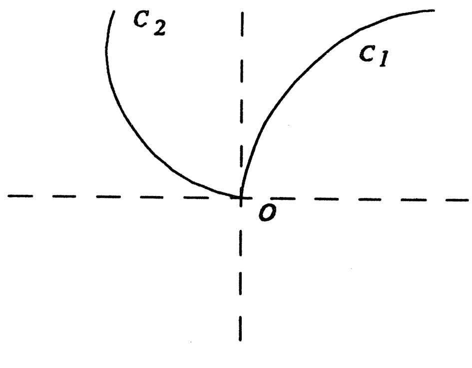


Figuur 26

Maar dan is $\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2}\pi - \arcsin\left(\frac{\varepsilon}{2R}\right) \neq \frac{1}{2}\pi$.

We beschouwen nu nader de situatie dat beide benen van de hoek cirkelbogen zijn. Gemakkelijk is de volgende stelling af te leiden (zie ook de fragmenten uit het werk van Oresme in §4).

Stelling
Twee cirkelbogen zijn onderling loodrecht alleen in de volgende situatie:



Figuur 27

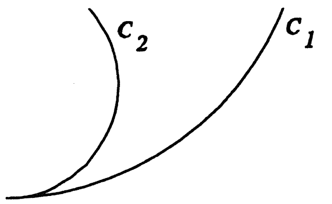
waarbij de stralen van de beide cirkels aan elkaar gelijk zijn.

Immers de raaklijnen moeten in de eerste plaats onderling loodrecht zijn. En dan geldt

$$\begin{aligned}\varphi(\varepsilon) &= \pi - \arcsin\left(\frac{\varepsilon}{2R_2}\right) - \left(\frac{1}{2}\pi - \arcsin\left(\frac{\varepsilon}{2R_1}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\pi - \arcsin\left(\frac{\varepsilon}{2R_2}\right) + \arcsin\left(\frac{\varepsilon}{2R_1}\right),\end{aligned}$$

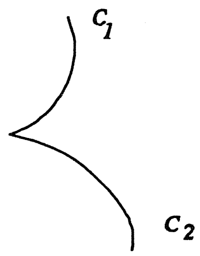
en dit is gelijk aan $\frac{1}{2}\pi$ dan en slechts dan als $R_1 = R_2$.

Als C_1 en C_2 elkaar rakende cirkelbogen zijn, dan kan dat inwendig rakend



Figuur 28

of uitwendig rakend



Figuur 29

zijn.
De maat van dergelijke snavelvormige hoeken blijkt volledig bepaald te zijn door de stralen van de betrokken cirkels.

Stelling

a) als C_1 en C_2 inwendig rakende cirkels zijn met stralen R_1 en $R_2 (R_2 < R_1)$, en C_3 en C_4 idem met stralen R_3 en $R_4 (R_4 < R_3)$, dan is de hoek tussen C_1 en C_2 gelijk aan de hoek tussen C_3 en C_4 dan en slechts dan als $R_1 = R_3$ en $R_2 = R_4$.

b) als C_1, C_2, resp. C_3, C_4 uitwendig rakende cirkels zijn met stralen R_1, R_2, resp. R_3, R_4 $(R_1 \leq R_2$ en $R_3 \leq R_4)$ dan is de hoek tussen C_1 en C_2 gelijk aan de hoek tussen C_3 en C_4 dan en slechts dan als $R_1 = R_3$ en $R_2 = R_4$.

c) als C_1 en C_2 inwendig rakende cirkels zijn, C_3 en C_4 uitwendig rakende cirkels, dan is de hoek tussen C_1 en C_2 nooit gelijk aan de hoek tussen C_3 en C_4.

We bewijzen onderdeel a. De hoek tussen C_1 en C_2 wordt gegeven door $\varphi_1(\varepsilon) = \arcsin\left(\frac{\varepsilon}{2R_2}\right) - \arcsin\left(\frac{\varepsilon}{2R_1}\right)$, de hoek tussen C_3 en C_4 door $\varphi_2(\varepsilon) = \arcsin\left(\frac{\varepsilon}{2R_4}\right) - \arcsin\left(\frac{\varepsilon}{2R_3}\right)$. Stellen we $\varphi_1(\varepsilon) = \varphi_2(\varepsilon)$, dus $\arcsin\left(\frac{\varepsilon}{2R_2}\right) - \arcsin\left(\frac{\varepsilon}{2R_1}\right) = \arcsin\left(\frac{\varepsilon}{2R_4}\right) - \arcsin\left(\frac{\varepsilon}{2R_3}\right)$, dan volgt door gelijkstellen van de coëfficiënten van de machtreeksen links en rechts gemakkelijk dat

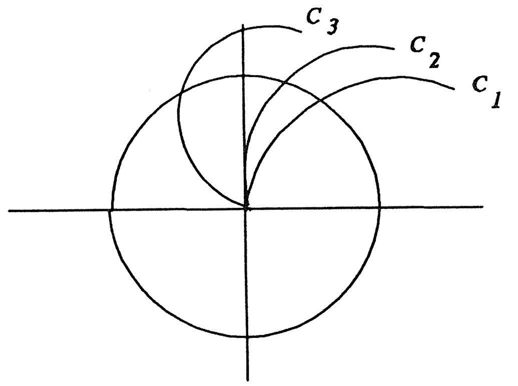
$$\frac{1}{R_2^{2n+1}} - \frac{1}{R_1^{2n+1}} = \frac{1}{R_4^{2n+1}} - \frac{1}{R_3^{2n+1}} \quad \text{voor alle } n \geq 0 \,.$$

Dit kunnen we herschrijven tot

$$\left(\frac{R_4}{R_2}\right)^{2n+1} = \frac{1-(R_4/R_3)^{2n+1}}{1-(R_2/R_1)^{2n+1}}\,,$$

dus $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{R_4}{R_2}\right)^{2n+1} = 1$. Dit kan alleen als $R_2 = R_4$, en dan geldt ook $R_1 = R_3$.

Het feit dat een hoek tussen een cirkelboog en een rechte lijn nooit recht kan zijn heeft een merkwaardige discontinuïteit tot gevolg. We bekijken hoeken tussen cirkelbogen (met straal R) en de x-as. Het middelpunt van deze cirkels laten we lopen over de cirkel $x^2 + y^2 = R^2$.



Figuur 30

Als het middelpunt in het vierde kwadrant ligt (C_1) dan is de hoek kleiner dan een rechte hoek. Ook als het middelpunt op de x-as ligt (C_2) en de cirkelboog dus raakt aan de y-as, is de hoek kleiner dan een rechte hoek. Zodra echter het middelpunt in het eerste kwadrant komt (C_3) is de hoek groter dan een rechte hoek. Bij draaien van één been van de hoek springt de hoek dus van scherp (kleiner dan een rechte hoek) naar stomp (groter dan een rechte hoek).

Van de coëfficiënten van de machtreeks $\varphi(\varepsilon) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \varphi_i \varepsilon^i$ is alleen de eerste, φ_0, invariant onder gelijkvormigheidstransformaties. De volgende stelling is echter zonder veel problemen af te leiden.

Stelling
De getallen $\frac{\varphi_k}{\varphi_1^k}$ zijn invariant onder gelijkvormigheidstransformaties.

Zo is b.v. voor de hoek tussen cirkelboog en raaklijn

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1^2} = 0 \quad , \quad \frac{\varphi_3}{\varphi_1^3} = \frac{1}{6} \, ,$$

en voor de hoek tussen parabool en top-raaklijn

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1^2} = 0 \quad , \quad \frac{\varphi_3}{\varphi_1^3} = -\frac{5}{6} \, .$$

Gezien de invariantie onder gelijkvormigheidstranformaties leveren de getallen $\frac{\varphi_k}{\varphi_1^k}$ voor alle cirkelbogen, resp. voor alle parabolen uiteraard dezelfde uitkomsten. De getallen voor cirkels en parabolen zijn echter wel verschillend.

In de concrete berekeningen zijn we uitgegaan van reguliere punten van een kromme. Een eenvoudig voorbeeld van een singulier punt levert de kromme $y^2 = x^3$, in parameter-voorstelling

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$$

We bekijken de hoek tussen één tak van de kromme en de raaklijn in $(0,0)$. Het is nu niet mogelijk $\varphi(\varepsilon)$ als een gewone machtreeks in ε te schrijven. Wel kan $\varphi(\varepsilon)$ geschreven worden als een reeks in machten van $\sqrt{\varepsilon}$. Een dergelijke reeks kunnen we beschouwen als een verfijning van de reeksen die bij reguliere punten horen. In een lexicografische ordening ligt bovenstaande hoek in tussen niet-triviale rechtlijnige hoeken en b.v. hoeken tussen cirkelbogen en raaklijnen. We gaan hier niet verder op in.

Bij de berekeningen hebben we een beroep gedaan op een geschikt gekozen coördinatisering en krommen bekeken die in parametervoorstelling of poolcördinaten gegeven waren. Te denken valt ook aan krommen die in intrinsieke coördinaten gegeven zijn, nl. de kromming als funktie van de booglengte (zie b.v. K. Strubecker, Differentialgeometrie I, Kurventheorie der Ebene und des Raumes; Berlin, 1955). Een interessante vraag is dan de hoek tussen b.v. een kromme en de raaklijn te beschrijven als funktie van de booglengte.

Hoofdstuk 2 Goniometrie

§0. Inleiding

De funkties sinus en cosinus kunnen op zeer verschillende manieren worden ingevoerd. In de paragrafen 1 t/m 9 zal dit steeds op een andere manier gebeuren. Er is naar gestreefd elke paragraaf op zichzelf te laten staan, er worden geen resultaten uit andere paragrafen gebruikt. Zo komt bijvoorbeeld de letter p in verschillende paragrafen met verschillende betekenis voor. In elke opzet komen, naast definities van sinus en cosinus, een aantal eigenschappen van deze funkties naar voren. In het algemeen betreft dit:

∗nulpunten,

∗periodiciteit,

∗even/oneven zijn,

∗$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,

∗som- en verschil-formules voor sinus en cosinus,

∗de afgeleiden van sinus en cosinus

In sommige paragrafen zullen niet al deze eigenschappen aan bod komen. In §3 b.v. worden de funkties alleen gedefinieerd op $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, zodat over periodiciteit niet gesproken hoeft te worden. Alleen in §1 en §2 heten ze echt sinus en cosinus. Daarna worden ze aangeduid als de funkties s en c, of ook wel g en f. Dit om toch een beetje los te raken van het (overigens juiste) idee dat het steeds over dezelfde funkties gaat.
We laten nu de karakteristieken van de verschillende paragrafen volgen.
Geheel meetkundig is §1, sinus en cosinus zijn verhoudingsgetallen die horen bij hoeken tussen 0° en 180°. Het gaat hier dus niet om funkties van een reële variabele; periodiciteit en afgeleiden komen hier dus niet voor. Voor de bijzondere hoeken van 0° , 90° en 180° passen de meetkundige definities van sinus en cosinus in feite niet zo goed; er worden argumenten gegeven om aan deze hoeken de bekende waarden van sinus en cosinus toe te kennen.
In §2 wordt uitgegaan van het definiëren van sinus en cosinus met behulp van een eenheidscirkel, een opzet zoals die momenteel in de meeste schoolboeken wordt aangetroffen. Het is van begin af aan hier duidelijk dat het om funkties gaat, maar het wordt ook sterk in verband gebracht met verhoudingsgetallen, eerst in rechthoekige driehoeken binnen de eenheidscirkel, later ook in willekeurige rechthoekige driehoeken. Uit een (meetkundig) bewijs van

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

komt een hele goede reden naar voren om aan een gestrekte hoek een maat π toe te kennen. Men kan de sinus ook (op een beperkt domein) definiëren als inverse van de arcsinus. Dit gebeurt in §3; de arcsinus (die hier uiteraard niet zo genoemd wordt) verschijnt als de lengte van de cirkelboog $y = \sqrt{1-x^2}$ tussen 0 en x, in eerste instantie voor $0 \le x \le 1$. Er wordt dan gebruik gemaakt van enkele resultaten uit de integraalrekening:

∗als $F(x) = \int_a^x f(z)dz$ dan is $F'(x) = f(x)$,

$*$de lengte van de grafiek van $y = f(x)$ tussen $x = a$ en $x = b$ wordt gegeven door

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \ .$$

De funktie s die op deze manier gedefinieerd wordt heeft in eerste instantie als domein $[0, \frac{1}{2}\pi]$; $c(x)$ wordt gedefinieerd als $\sqrt{1 - s(x)^2}$. Beide funkties blijken op voor de hand liggende wijze te kunnen worden uitgebreid tot funkties op $[-\frac{1}{2}\pi\ , \frac{1}{2}\pi]$.
De funkties s en c verschijnen in §4 als som van de machtreeksen

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ en } \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ .$$

Elementen uit de theorie van de reële machtreeksen spelen hierin een rol; termsgewijs differentiëren van machtreeksen, substitueren van een machtreeks in een machtreeks. Alle genoemde eigenschappen blijken zonder al te veel problemen afgeleid te kunnen worden.

In §5 wordt een stukje funktietheorie over existentie en uniciteit van oplossingen van differentiaalvergelijkingen met gegeven beginvoorwaarden afgeleid. Het gaat dan in het bijzonder om de 2^e orde differentiaalvergelijking $F''(x) = -F(x)$. Door de beginvoorwaarden $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$, resp. $F(0) = 1$, $F'(0) = 0$ worden dan eenduidig funkties s en c gedefinieerd, waarna de bekende eigenschappen worden afgeleid. In deze paragraaf worden complexe getallen gebruikt; het blijft echter analyse van funkties van een reële variabele. De complexe getallen zijn in feite alleen nodig om de vergelijking $z^2 + 1 = 0$ (dit is de zgn. karakteristieke vergelijking van de differentiaalvergelijking $F''(x) + F(x) = 0$) op te kunnen lossen.
Een zeer bijzondere plaats neemt §6 in. Daarin worden niet bij voorbaat definities van sinus en cosinus gegeven, maar wordt uitgaande van de veronderstelling dat men twee funkties f en g heeft, met de eigenschappen

I $\quad f(x)$ en $g(x)$ zijn voor alle $x \in \mathbb{R}$ gedefinieerd,

II $\quad f(x - y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}$,

III $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{x} = 1,$

afgeleid dat dan de funkties g en f alle bekende eigenschappen van sinus en cosinus hebben. Dit gedeelte is, in enigszins gewijzigde vorm, de inhoud van een artikel van J.C.H. Gerretsen in Euclides (zie[16]). Aan het eind worden existentie en uniciteit van dergelijke funkties g en f aangetoond. In feite speelt deze paragraaf dus een sleutelrol: er blijkt uit dat in alle paragrafen inderdaad steeds over dezelfde funkties gesproken wordt.
In §7 worden de funkties sinus en cosinus voor een complexe variabele z gedefinieerd. Uitgangspunt daarbij is de funktie

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ ,$$

een voor alle z analytische funktie. Uit de definities

$$s(z) = \frac{1}{2i}\,(e^{iz} - e^{-iz}) \text{ en } c(z) = \frac{1}{2}\,(e^{iz} + e^{-iz})$$

worden op eenvoudige wijze de genoemde eigenschappen afgeleid.
Er wordt in §8 een sinus-funktie gedefinieerd uitgaande van de nulpunten van deze funktie. Eerst wordt een funktie bekeken die nulpunten heeft in alle $x \in \mathbb{Z}$. Zo'n funktie kan gedefinieerd worden door

$$g(x) = \lim_{M\to\infty} x \prod_{\substack{n=-M \\ n\neq 0}}^{M} (1 + \frac{x}{n})$$

De analyse van deze funktie g blijkt vrij lastig, o.a. het bepalen van $g'(x)$. Krachtige hulpmiddelen hierbij blijken de funkties

$$\varepsilon_1(x) = \lim_{M\to\infty} \sum_{n=-M}^{M} \frac{1}{x+n} \quad \text{en} \quad \varepsilon_2(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$$

te zijn. Van deze funkties worden enkele eigenschappen afgeleid; de ideeën hiervoor komen uit [23].
Het blijkt dan mogelijk een aantal eigenschappen van $g(x)$ en $g'(x)$ af te leiden. Er dient zich een merkwaardige constante aan:

$$p = \sqrt{6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}\,.$$

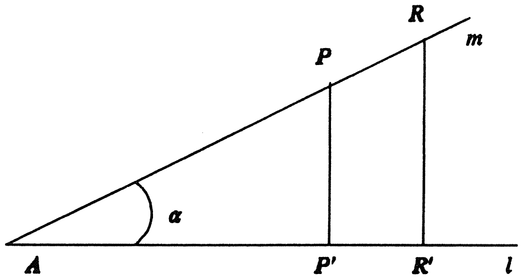
Door de funkties g en g' met behulp van deze constante te herschalen:

$$s(x) = p \cdot g(\frac{x}{p})$$

$$c(x) = g'(\frac{x}{p})$$

komen alle bekende eigenschappen tevoorschijn.
Tenslotte worden in §9 beide funkties op uiterst formele wijze ingevoerd. Dit is een bewerking van een hoofdstuk uit [7]. Uitgangspunt daarbij is de verzameling van de reële getallen, beschouwd als topologische optelgroep. Er is een verband met §3 uit hoofdstuk 1. Aan het eind van het hoofdstuk is nog een kort paragraafje met wat opmerkingen over het getal π toegevoegd.

§1. Meetkunde



Figuur 31

$\angle A$ is een scherpe hoek, P een punt op één van de benen. P' is de projektie van P op het andere been. Dan definiëren we

$$\sin\ \alpha = \frac{PP'}{AP} \quad \text{en} \quad \cos\ \alpha = \frac{AP'}{AP}$$

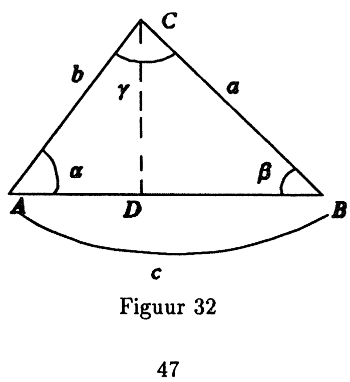
Nemen we een ander punt R, met projektie R', dan geldt vanwege de gelijkvormigheid van $\Delta APP'$ en $\Delta ARR'$ dat

$$\frac{PP'}{AP} = \frac{RR'}{AR} \quad \text{en} \quad \frac{AP'}{AP} = \frac{AR'}{AR}\,,$$

m.a.w. de definities van $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$ zijn onafhankelijk van het punt dat geprojekteerd wordt. Op deze manier zijn voor elke α met $0° < \alpha < 90°$ getallen $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$ vastgelegd. Uit de figuur lezen we gemakkelijk af dat

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \text{(Stelling van Pythagoras)}$$

In een scherphoekige driehoek kunnen we nu de zogenaamde sinus-regel en cosinus-regel afleiden.



Figuur 32

CD is de hoogtelijn uit C.
$\sin\alpha = \dfrac{CD}{b}$, dus $CD = b\sin\alpha$; evenzo $CD = a\sin\beta$, dus $b\sin\alpha = a\sin\beta$, anders geschreven als

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \; .$$

Op dezelfde manier kan worden afgeleid dat

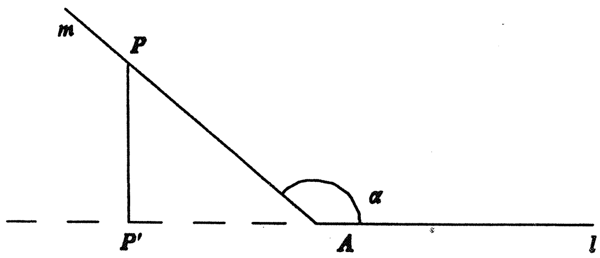
$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \; , \text{ dus}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \; .$$

Dit heet de sinus-regel in ΔABC.
We gebruiken nogmaals dezelfde figuur. De stelling van Pythagoras in ΔBDC luidt:

$$\begin{aligned} a^2 = CD^2 + BD^2 &= (b\sin\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \; . \end{aligned}$$

Dit heet de cosinus-regel. Er gelden analoge formules voor b^2 en c^2.
Tot zover hebben we alleen scherpe hoeken bekeken. Als α een stompe hoek is dan valt de projektie P' van een punt P op het ene been buiten het andere been.



Figuur 33

We willen $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$ voor deze hoeken definiëren zó dat ook in een stomphoekige driehoek de sinus-regel en de cosinus-regel blijven gelden. Dit blijkt te kunnen door de cosinus negatief te definiëren op de volgende manier:

$$\cos\alpha = -\frac{AP'}{AP} \; .$$

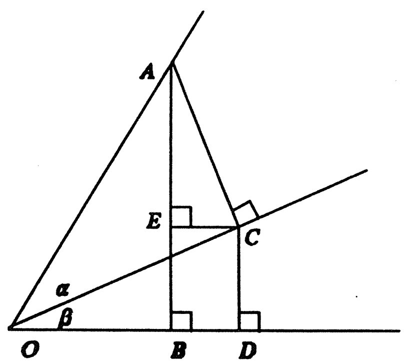
Voor $\sin\alpha$ is er geen probleem:

$$\sin\alpha = \frac{PP'}{AP} \; .$$

We kunnen dit ook als volgt formuleren:
Voor een stompe hoek α is

$$\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha) \quad \text{en} \quad \cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)\ .$$

Merk op dat deze beide identiteiten nu ook voor een scherpe hoek α gelden.
Tot zover is een rechte hoek buiten beschouwen gebleven. Het ligt nu voor de hand $\cos 90^\circ = -\cos(180^\circ - 90^\circ)$ te veronderstellen, dus te definiëren $\cos 90^\circ = 0$. Voor $\sin 90^\circ$ komen dan ± 1 in aanmerking (vanwege $\sin^2 90^\circ + \cos^2 90^\circ = 1$), en omdat de sinus steeds positief is definiëren we $\sin 90^\circ = 1$. We bekijken nu uitdrukkingen voor $\sin(\alpha \pm \beta)$ en $\cos(\alpha \pm \beta)$. We gaan er daarbij van uit dat α en β zo gekozen zijn dat $0^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ$ en $\alpha - \beta > 0^\circ$. We geven eerst een bewijs van $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, waarbij we veronderstellen dat α, β en $\alpha + \beta$ scherp zijn.

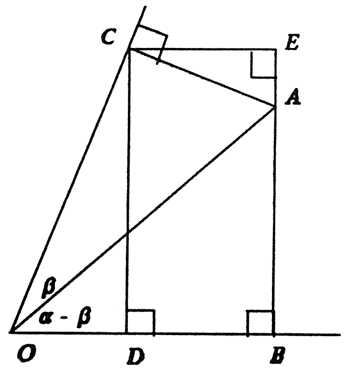


Figuur 34

Uit A zijn de loodlijnen AB en AC neergelaten; uit C de loodlijnen CD en CE.
$\angle EAC = \angle ECO = \alpha$.

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \frac{AB}{OA} = \frac{EB + EA}{OA} = \\
&= \frac{CD + EA}{OA} = \frac{CD}{OA} + \frac{EA}{OA} = \\
&= \frac{CD}{OC} \cdot \frac{OC}{OA} + \frac{EA}{AC} \cdot \frac{AC}{OA} = \\
&= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

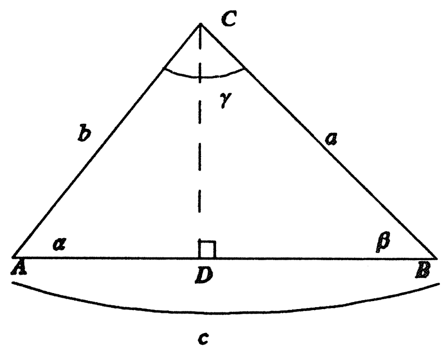
Uit dezelfde figuur valt op analoge manier af te leiden $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.
De formules voor $\sin(\alpha - \beta)$ en $\cos(\alpha - \beta)$ kunnen op eenzelfde manier afgeleid worden uit:



$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Figuur 35

Een alternatief bewijs kan als volgt gegeven worden. Neem α en β scherp, en teken een ΔABC met $\angle A = \alpha$ en $\angle B = \beta$.



Figuur 36

$$\begin{aligned} c &= BD + AD \\ &= a\cos\beta + b\cos\alpha \end{aligned}$$

Uit de sinus-regel volgt

$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot c\ ,\ b = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot c$$

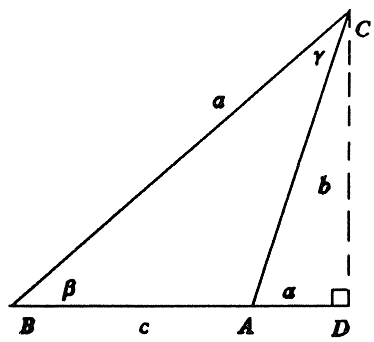
dus

$$c = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot\cos\beta\cdot\ c + \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot\cos\alpha\cdot c$$

dus

$$\sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\ .$$

En omdat $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ geldt $\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$, waarmee de formule voor $\sin(\alpha + \beta)$ in het geval dat α en β beide scherp zijn is aangetoond. Een formule voor $\sin(\alpha - \beta)$, waarin α en β scherpe hoeken zijn, en $\alpha > \beta$, kan op dezelfde manier uit de volgende figuur worden afgeleid.



$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

Figuur 37

Nu we op deze manier tot formules voor $\sin(\alpha \pm \beta)$ voor scherpe hoeken α en β gekomen zijn volgen de formules voor $\cos(\alpha \pm \beta)$ gemakkelijk m.b.v. $\cos(\alpha \pm \beta) = \sin(90° - (\alpha \pm \beta))$ als $\alpha + \beta$ scherp is, en $\cos(\alpha + \beta) = -\sin((\alpha + \beta) - 90°)$ als $\alpha + \beta$ stomp is.
We hebben nu dus twee bewijzen gezien van de formules voor $\sin(\alpha \pm \beta)$ en $\cos(\alpha \pm \beta)$, voor scherpe hoeken α en β. Er zit wel een verschil in beide bewijzen: bij het eerste wordt extra verondersteld dat $\alpha + \beta$ scherp is. Bij het tweede bewijs is dat niet nodig. Daar wordt gebruik gemaakt van de sinus-regel, en zoals al eerder opgemerkt geldt deze zowel in een scherphoekige als in een stomphoekige driehoek.
De uitbreiding van de formules naar het geval dat één van beide hoeken, b.v. α, stomp is (α en β beide stomp komt in deze context niet in aanmerking) is nu niet moeilijk meer:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin((180° - \alpha) - \beta)\ ,$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin((180° - \alpha) + \beta)\ ,\ \text{etc.}$$

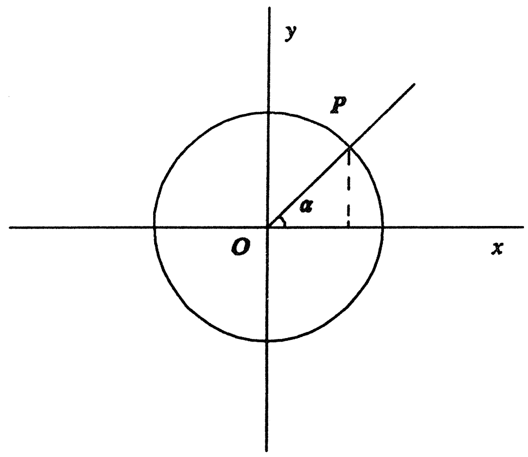
Eén bijzondere hoek, nl. de rechte hoek is al apart bekeken (hierop waren de meetkundige definities van sinus en cosinus niet toepasbaar). Met behulp van de som-formules voor sinus en cosinus, in het bijzonder de daaruit volgende formules voor een dubbele hoek, kunnen we nu ook sinus en cosinus voor de beide extreme hoeken 180° en 0° vastleggen:

$$\sin 180° = 2\sin 90°\cos 90° = 0$$
$$\cos 180° = \cos^2 90° - \sin^2 90° = -1\ .$$

En $\sin 0° = \sin(180° - 0°) = 0$
$\cos 0° = -\cos(180° - 0°) = 1\ .$

§2. Eenheidscirkel

Getekend is een eenheidscirkel in een rechthoekig coördinaten-stelsel:



Figuur 38

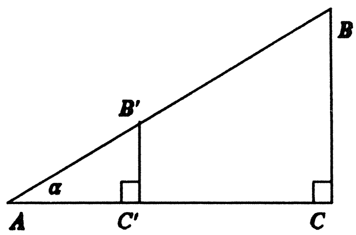
We kennen nu aan een hoek α als maat een getal toe, en we meten daarbij hoeken α vanaf de positieve x-as in positieve zin (op dit moment is het nog niet belangrijk in welke eenheid dit gebeurt). De letter α wordt zowel gebruikt om de hoek α als de maat daarvan aan te geven We definiëren nu:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= x\text{-coördinaat van } P \\ \sin\alpha &= y\text{-coördinaat van } P\ . \end{aligned}$$

Het punt P heeft dus de coördinaten $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Als we hoeken in graden meten kunnen we de waarden van $\cos\alpha$ en $\sin\alpha$ voor $\alpha = 0°, 90°, 180°, 270°$ gemakkelijk uit de figuur aflezen Bovendien is een aantal eigenschappen uit de figuur af te lezen:

$$\cos(\alpha + k\cdot 360°) = \cos\alpha \qquad \sin(\alpha + k\cdot 360°) = \sin\alpha$$
$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

Hierbij is, als α positief is, $-\alpha$ de hoek die even groot is als α, maar dan in negatieve zin vanaf de positieve x-as gemeten.
In een rechthoekige driehoek



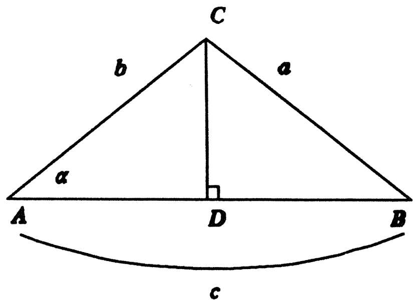
Figuur 39

met $AB' = 1$ lezen we af dat $\sin\alpha = B'C'$ en $\cos\alpha = AC'$. Vanwege de gelijkvormigheid van de driehoeken $AC'B'$ en ACB geldt

$$\frac{B'C'}{AB'} = \frac{BC}{AB} \text{ en } \frac{AC'}{AB'} = \frac{AC}{AB}\text{, dus}$$

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} \text{ en } \cos\alpha = \frac{AC}{AB}\,.$$

De cosinus-regel volgt nu gemakkelijk.

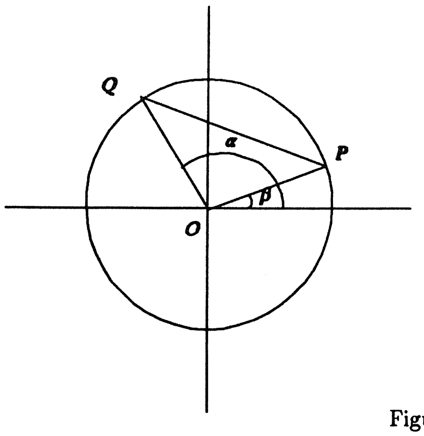


Figuur 40

$$\begin{aligned} a^2 = DB^2 + DC^2 &= (c - b\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha)^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha \end{aligned}$$

Het is eenvoudig na te gaan dat de cosinus-regel ook geldt als α een stompe hoek is.

In de volgende situatie



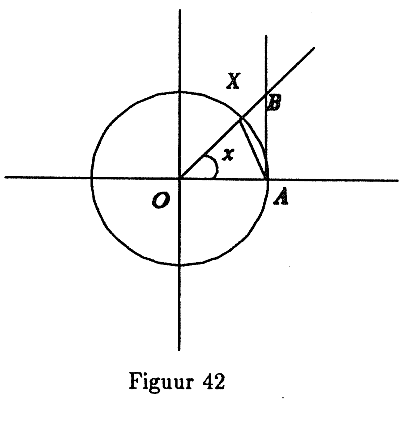
$$P = (\cos\beta, \sin\beta)$$
$$Q = (\cos\alpha, \sin\alpha).$$

Figuur 41

passen we de cosinus-regel toe in ΔOPQ:

$$QP^2 = OP^2 + QO^2 - 2\,OP \cdot OQ \cos(\alpha - \beta)$$
$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)\ ,$$

waaruit volgt $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. Door gebruik te maken van $\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin(\alpha - \beta) = \cos(\gamma - \alpha + \beta)$, waarbij γ een rechte hoek is, en $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ kunnen gemakkelijk de formules voor $\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha - \beta)$ en $\sin(\alpha + \beta)$ worden afgeleid.
We leggen nu verband tussen een hoek en de lengte van een cirkelboog, en wel zo dat bij cirkelbogen van gelijke lengte ook gelijke hoeken horen. De oppervlakte van de eenheidscirkel noemen we π, de omtrek is dan 2π. We kiezen één of andere eenheid voor de hoek; stel dat de gestrekte hoek p eenheden is.



Figuur 42

Uit de figuur blijkt

$$\text{opp. } \Delta OAX < \text{ opp. sektor } OAX < \text{ opp. } \Delta OAB\ ,$$

dus

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2p}\pi < \frac{1}{2}\tan x$$

(het gaat hier om de eenheidscirkel, dus $OA = OX = 1$; sektor OAX is het $\frac{x}{2p}$-de deel van de cirkel). Anders geschreven

$$\frac{p}{\pi} < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

Als we nu $p = \pi$ nemen dan volgt hieruit gemakkelijk dat

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \ .$$

Op deze manier kun je de eenheid "radialen" definiëren; een gestrekte hoek is dan π radialen groot.
Vanwege $\sin(-x) = -\sin x$ volgt ook

$$\lim_{x \uparrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \text{ dus } \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \ ,$$

meestal geschreven als

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \ .$$

Deze limiet stelt ons in staat de afgeleide van de funktie $x \mapsto \sin x$ te bepalen:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} =$$

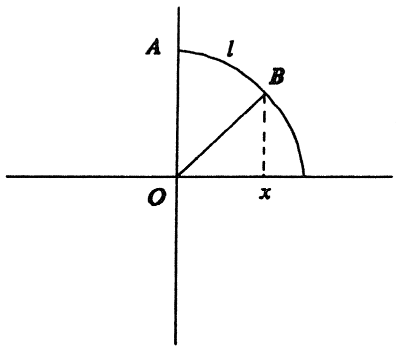
$$\lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \sin x \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right\} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \sin x \frac{-\sin \Delta x}{\cos \Delta x + 1} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} + \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right\} = \cos x \ .$$

Dus de afgeleide van de funktie $x \mapsto \sin x$ is de funktie $x \mapsto \cos x$.
Door b.v. gebruik te maken van $\cos x = \sin(\frac{1}{2}\pi - x)$ kan dan onmiddellijk afgeleid worden dat de afgeleide van de funktie $x \mapsto \cos x$ de funktie $x \mapsto -\sin x$ is.

§3. Arcsinus

We bekijken het deel van de eenheidscirkel dat in het eerste kwadrant ligt:



Figuur 43

De grootte van $\angle AOB$, de lengte l van boog AB, en x hangen op eenduidige wijze met elkaar samen. We onderzoeken het verband tussen l en x, en vatten l op als funktie van x. Omdat de cirkelboog beschreven wordt door $y = \sqrt{1-x^2}$ kunnen we $l(x)$ weergeven door de volgende integraal:

$$l(x) = \int_0^x \sqrt{1+(y')^2}\,dt = \int_0^x \sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}}\,dt$$
$$= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\,.$$

Voor $l(1)$ staat hier in feite een oneigenlijke integraal, maar uit de tekening blijkt dat $l(1) = \frac{1}{2}\pi$, waarbij de omtrek van de cirkel 2π genoemd wordt.

$$l'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0\,,$$

dus l is een differentieerbare, monotoon stijgende funktie op $(0,1)$ (dit laatste volgt trouwens ook onmiddellijk uit de definitie van $l(x)$).

$$\lim_{x\downarrow 0} l(x) = l(0) = 0 \quad , \quad \lim_{x\uparrow 1} l(x) = l(1) = \tfrac{1}{2}\pi\,.$$

De funktie l is dus een bijectie van $[0,1]$ op $[0,\frac{1}{2}\pi]$.
De inverse van deze funktie l blijkt tal van interessante eigenschappen te hebben. Noemen we $s(x) = l^{-1}(x)$, dan is s ook een monotoon stijgende funktie, met $s(0) = 0$ en $s(\frac{1}{2}\pi) = 1$. Omdat s de inverse van l is, geldt

$$x = l(s(x)) = \int_0^{s(x)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\,.$$

Differentiëren van deze uitdrukking levert

$$1 = \frac{1}{\sqrt{1 - s(x)^2}} \quad \cdot \quad s'(x) \; ,$$

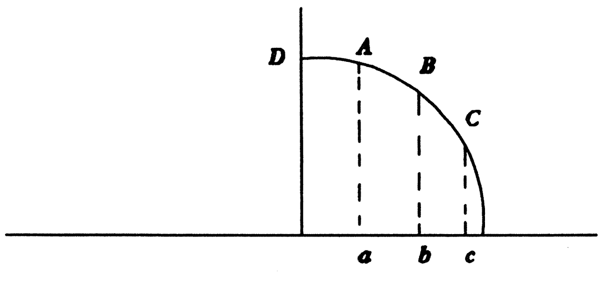
dus $s'(x) = \sqrt{1 - s(x)^2}$.
Definiëren we nu $c(x) = \sqrt{1 - s(x)^2}$, dan is $c(x)$ dus een monotoon dalende funktie van $[0, \frac{1}{2}\pi]$ naar $[0, 1]$, met

$$\begin{aligned} &c(0) = 1, \; c(\tfrac{1}{2}\pi) = 0 \; , \quad \text{en} \\ &s'(x) = c(x) \; . \end{aligned}$$

In de definitie van $c(x)$ zit al opgesloten de identiteit $s(x)^2 + c(x)^2 = 1$.
Differentiëren van deze uitdrukking levert

$$2s(x)s'(x) + 2c(x)c'(x) = 0 \; ,$$

waaruit gemakkelijk volgt
$c'(x) = -s(x)$ (want $c(x) \neq 0$ op $(0, \frac{1}{2}\pi)$).
We bekijken nu eerst de volgende situatie



Figuur 44

Hierbij is boog DA = boog BC (anders gezegd: boog DC is som van de bogen DA en DB). Het is nu niet moeilijk om een verband tussen a, b en c af te leiden. Omdat gelijke bogen gelijke koorden omspannen geldt dat $DA = BC$. Toepassen van de afstandsformule op de punten $D = (0, 1)$ en $A = (a, \sqrt{1 - a^2})$, resp. $B = (b, \sqrt{1 - b^2})$ en $C = (c, \sqrt{1 - c^2})$ levert

$$a^2 + (\sqrt{1 - a^2} - 1)^2 = (b - c)^2 + (\sqrt{1 - b^2} - \sqrt{1 - c^2})^2$$

dus $\sqrt{1 - a^2} = bc + \sqrt{1 - b^2}\,\sqrt{1 - c^2}$.
Kwadrateren levert

$$c^2 - 2\,bc\sqrt{1 - a^2} + b^2 - a^2 = 0 \; ,$$

waaruit c opgelost kan worden:

$$c = a\ \sqrt{1-b^2} + b\ \sqrt{1-a^2}\ .$$[2]

Neem nu $x, y \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ zó dat ook $x + y \in [0, \frac{1}{2}\pi]$. Er zijn dan $a, b \in [0,1]$ met $l(a) = x$, $l(b) = y$. Er is dan ook $c \in [0,1]$ zó dat $l(a) + l(b) = l(c)$, waarbij c volgens de zojuist gegeven afleiding gegeven wordt door

$$c = a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\ .$$

$$s(x+y) = s(l(a) + l(b)) = s(l(c)) = c = s(x)\sqrt{1-s(y)^2} + s(y)\sqrt{1-s(x)^2}$$

$$= s(x)c(y) + c(x)s(y)\ .$$

Door deze uitdrukking naar x te differentiëren volgt

$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$$

De funktie l is een continue bijectie van $[0,1]$ op $[0, \frac{1}{2}\pi]$, gemakkelijk uit te breiden tot een continue bijectie $\bar{l}$ van $[-1,1]$ op $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, d.m.v. $\bar{l}(x) = -l(-x)$ voor $x \in [-1, 0)$. Deze funktie $\bar{l}$ is zeker differentieerbaar op $(-1,0) \cup (0,1)$, met als afgeleide $\bar{l}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Verder is $\bar{l}$ in $x = 0$ rechts en links differentieerbaar met afgeleide 1. Omdat $\bar{l}$ continu is, is $\bar{l}$ dus ook in $x = 0$ differentieerbaar, met $\bar{l}'(0) = 1$.
Noemen we nu $\bar{s}$ de inverse van deze funktie $\bar{l}$, dan geldt dus

$$\begin{array}{lll} \bar{s}(x) = s(x) & \text{voor} & 0 \le x \le \frac{1}{2}\pi \\ \bar{s}(x) = -s(-x) & \text{voor} & -\frac{1}{2}\pi \le x \le 0\ . \end{array}$$

Uit de inverse funktiestelling volgt nu al dat $\bar{s}$ voor $x = 0$ differentieerbaar is, met $\bar{s}'(0) = 1$. Dit kan ook geschreven worden als

$$\lim_{x \to 0} \frac{\bar{s}(x)}{x} = 1\ .$$

De funktie $\bar{s}$ is op het interval $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ differentieerbaar, met $\bar{s}'(x) = (s(x))' = c(x)$ voor $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$, en $\bar{s}'(x) = (-s(-x))' = c(-x)$ voor $-\frac{1}{2}\pi < x \le 0$. Definiëren we nu $\bar{c}(x) = c(-x)$ voor $-\frac{1}{2}\pi \le x \le 0$, dan is $\bar{c}$ een continue funktie van $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ naar $[0,1]$ (geen bijectie!), differentieerbaar op $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, met

$$\begin{aligned} \bar{s}'(x) &= \bar{c}(x) \\ \bar{c}'(x) &= -\bar{s}(x)\ . \end{aligned}$$

[2]Dit resultaat kan ook op analytische wijze (zonder terug te grijpen naar een meetkundige voorstelling) worden afgeleid. Door de substitutie $s = t\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-t^2}$ gaat de integraal $\int_0^a \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ over in $\int_b^{a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$.

Het is nu gemakkelijk te controleren dat de eerder afgeleide formules voor $s(x+y)$ en $c(x+y)$ ook van toepassing zijn voor $\bar{s}(x+y)$ en $\bar{c}(x+y)$: s en c overal vervangen door $\bar{s}$ en $\bar{c}$. En vanwege $\bar{s}(-x) = -\bar{s}(x)$ en $\bar{c}(-x) = \bar{c}(x)$ (deze zijn eenvoudig na te gaan) kunnen dan ook gemakkelijk formules voor $\bar{s}(x-y)$ en $\bar{c}(x-y)$ worden afgeleid.

In het voorafgaande is de sinus-funktie op analytische wijze geïntroduceerd als inverse van de funktie

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} .$$

In [12] geven Courant en John een soortgelijk voorbeeld. Zij beschouwen de funktie

$$y(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} ,$$

en gebruiken deze funktie om $\tan x$ te definiëren.

§4. Machtreeksen.

In §2 hebben we gezien dat sinus en cosinus uitgaande van een meetkundige voorstelling met behulp van een eenheidscirkel gedefinieerd kunnen worden. Uitgaande van deze definitie werden o.a. de afgeleiden van de beide funkties bepaald. De funkties sinus en cosinus zijn dan oneindig vaak differentieerbare funkties met bekende afgeleiden voor $x = 0$. Op die manier kan voor beide funkties de Taylorreeks bepaald worden. Wanneer men nu een zuiver analytische voorstelling van sinus en cosinus wil hebben, zonder eerst een beroep te doen op een meetkundige voorstelling, kan men deze funkties door middel van hun machtreeksen definiëren. Dan moeten de eigenschappen van sinus en cosinus uit deze definitie afgeleid kunnen worden. Zoals in §7 nader bekeken zal worden geeft dit ook een opstap naar het definiëren van $\sin z$ en $\cos z$ voor complexe getallen z.
De machtreeksen

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{en} \quad \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

hebben beide convergentiestraal ∞; ze definiëren dus willekeurig vaak differentieerbare funkties

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{en} \quad c(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (x \in \mathbb{R}) \ .$$

Duidelijk is dat $s(0) = 0$ en $c(0) = 1$,
en $s(-x) = -s(x)$, $c(-x) = c(x)$.
Omdat de machtreeksen termsgewijs gedifferentieerd mogen worden volgt gemakkelijk

$$s'(x) = c(x) \quad \text{en} \quad c'(x) = -s(x) \ .$$

Deze beide uitdrukkingen impliceren o.a.

$$s(x)s'(x) + c(x)c'(x) = 0 \ ,$$

en na integreren volgt er dat

$$s(x)^2 + c(x)^2 = \text{ constante } .$$

Invullen van b.v. $x = 0$ levert dat deze constante 1 is, dus

$$s(x)^2 + c(x)^2 = 1 \ .$$

Uit de machtreeksen kunnen we een formule voor $s(x+y)$ afleiden:

$$\begin{aligned}
s(x+y) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(x+y)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\sum_{l=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{l} x^l\, y^{2k+1-l} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\sum_{l=0}^{2k+1} \frac{1}{l!(2k+1-l)!} x^l\, y^{2k+1-l} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{(2j+1)!(2(k-j))!} x^{2j+1}\, y^{2(k-j)} \right) + \\
&\quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{(2j)!(2(k-j)+1)!} x^{2j}\, y^{2(k-j)+1} \right) \\
&= s(x)c(y) + c(x)s(y)
\end{aligned}$$

Dus $s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y)$.
Door deze uitdrukking naar x te differentiëren, en door $s(-y) = -s(y)$, $c(-y) = c(y)$ te gebruiken, volgen gemakkelijk formules voor $c(x+y), s(x-y), c(x-y)$.
We laten nu zien dat $c(x)$ op $[0,2]$ minstens één nulpunt heeft.

$$\begin{aligned}
&c(0) = 1 \\
&c(2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!} = 1 - 2 + \frac{16}{24} + \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{4^k}{(2k)!} \\
&\qquad = -\frac{1}{3} - \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{4^k}{(2k)!} \\
&\qquad = -\frac{1}{3} - \sum_{l=2}^{\infty} \left\{ \frac{4^{2l-1}}{(4l-2)!} - \frac{4^{2l}}{(4l)!} \right\}
\end{aligned}$$

(vanwege de absolute convergentie mag de sommatie-volgorde veranderd worden). Nu is

$$\sum_{l=2}^{\infty} \left\{ \frac{4^{2l-1}}{(4l-2)!} - \frac{4^{2l}}{(4l)!} \right\}$$

een reeks met positieve termen.
Dus geldt $c(2) < 0$.
Omdat c een continue funktie is heeft c op $[0,2]$ dus minstens één nulpunt. En omdat $c(0) \neq 0$ is er dus een kleinste positieve nulpunt p van $c(x)$.
Op $(0,p)$ is $c(x) > 0$, dus $s(x)$ stijgend, dus $s(p) > 0$.

Uit $s(p)^2 + c(p)^2 = 1$ volgt dan dat $s(p) = 1$.
Met behulp van eerder afgeleide formules volgt dan gemakkelijk:

$$\begin{aligned}
&s(2p) = 2\,s(p)\,c(p) = 0\\
&c(2p) = c(p)^2 - s(p)^2 = -1\\
&s(4p) = 2\,s(2p)\,c(2p) = 0\\
&c(4p) = c(2p)^2 - s(2p)^2 = 1\\
&s(x+4p) = s(x)c(4p) + c(x)s(4p) = s(x)\\
&c(x+4p) = c(x)c(4p) - s(x)s(4p) = c(x)\ .
\end{aligned}$$

§5. Differentiaalvergelijkingen

n §4 zijn de funkties sinus en cosinus gedefinieerd met behulp van machtreeksen. In deze aragraaf worden de funkties op een andere, ook zuiver analytische wijze gedefinieerd, nl. als plossingen van een speciale tweede orde differentiaalvergelijking. Daartoe onderzoeken we de lifferentiaalvergelijking $f''(x) + f(x) = 0$. Door geschikt gekozen beginvoorwaarden kunnen ve verschillende oplossingen van deze differentiaalvergelijking van elkaar onderscheiden. Om iitspraken over existentie en uniciteit van oplossingen te kunnen doen ontwikkelen we eerst en stukje funktie-theorie.

Bekijk eerst de machtreeks $E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$. De convergentiestraal is ∞, dus $E(z)$ is en analytische funktie op $\mathbb{C}$. Voor $x \in \mathbb{R}$ geldt $E(x) \in \mathbb{R}$, en voor elke $a \in \mathbb{C}$ is de funktie $x \mapsto E(ax)$ een willekeurig vaak differentieerbare funktie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{C}$. Uit de machtreeks valt verder gemakkelijk af te leiden dat $(E(ax))' = a\ E(ax)$. We leiden nog enkele eigenschappen af.
Noem $g(x) = E(ax), f(x) = E(-ax)(a \in \mathbb{C}$ willekeurig). Dan is

$$(g(x) \cdot f(x))' = a\ E(ax)E(-ax) - a\ E(ax)E(-ax) = 0\ ,$$

dus $g(x) \cdot f(x) = \text{constante} = 1$ door $x = 0$ in te vullen.
Dus

$$E(-ax) = \frac{1}{E(ax)}$$

(i.h.b. is $E(ax) \neq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$). We kunnen ditzelfde procédé toepassen op $E((a+b)x) \cdot E(-ax) \cdot E(-bx), a, b \in \mathbb{C}$, en vinden dan $E((a+b)x)E(-ax)E(-bx) = 1$, wat dus herschreven kan worden als $E((a+b)x) = E(ax) \cdot E(bx)$. I.h.b. door $x = 1$ te nemen volgt er dat $E(a+b) = E(a) \cdot E(b)$ voor alle $a, b \in \mathbb{C}$.

Stelling.
Voor elke $a, c \in \mathbb{C}$ en elke continue funktie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ is er precies één continu differentieerbare funktie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zó dat

$$\begin{cases} f'(x) = & af(x) + h(x) \\ f(0) = & c \end{cases}$$

Bewijs.
Herleid dit probleem eerst tot een eenvoudiger. Schrijf de gezochte oplossing f in de vorm $f(x) = E(ax)f_1(x)$, dan moet f_1 voldoen aan

$$\begin{cases} f_1'(x) = & E(-ax)h(x) \\ f_1(0) = & c \end{cases}$$

Welnu, dit laatste probleem heeft precies één oplossing:

$$f_1(x) = c + \int_0^x E(-at)h(t)dt$$

(N.B. omdat we funkties van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{C}$ beschouwen is het symbool $\int_0^x$ ondubbelzinnig gedefinieerd).
Het gestelde probleem heeft dus de unieke oplossing

$$f(x) = c\ E(ax) + E(ax) \int_0^x E(-at)h(t)dt\ .$$

Stelling.
Voor elke $b, c, d_0, d_1 \in \mathbb{C}$ en elke continue funktie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ is er precies één $2\times$ continu differentieerbare funktie f met

$$\begin{cases} f''(x) + bf'(x) + cf(x) = h(x) \\ f(0) = d_0 \\ f'(0) = d_1 \end{cases}$$

Bewijs.
Het polynoom $z^2 + bz + c$ is in $\mathbb{C}$ te ontbinden als $(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$.
De 2^e orde differentiaalvergelijking is dan te herschrijven tot

$$(D - \alpha_1 I)\ ((D - \alpha_2 I)(f)) = h \qquad\qquad (D(f) = f')\ .$$

We lossen dit probleem in twee stappen op:

stap 1 zoek $g(x)$ met $(D - \alpha_1 I)(g) = h$, dus $g'(x) = \alpha_1 g(x) + h(x)$, en $g(0) = d_1 - \alpha_2 d_0$

stap 2 zoek $f(x)$ met $(D - \alpha_2 I)(f) = g$, dus $f'(x) = \alpha_2 f(x) + g(x)$, en $f(0) = d_0$

(de voorwaarde voor $g(0)$ volgt uit de voorwaarde $f'(0) = d_1$).
Bij stap 1 is er een unieke oplossing:

$$g(x) = (d_1 - \alpha_2 d_0)E(\alpha_1 x) + E(\alpha_1 x) \int_0^x E(-\alpha_1 t)h(t)dt\ .$$

En bij stap 2 is er ook een unieke oplossing:

$$f(x) = d_0 E(\alpha_2 x) + E(\alpha_2 x) \int_0^x E(-\alpha_2 t)g(t)dt\ .$$

We keren nu terug naar het oorspronkelijk gestelde probleem. Volgens het voorgaande heeft de differentiaalvergelijking $f''(x) + f(x) = 0$ precies één oplossing zodra we twee beginvoorwaarden vastleggen. Er is dus precies één funktie $s(x)$ met

$$\begin{cases} s''(x) + s(x) = 0 \\ s(0) = 0 \\ s'(0) = 1\ , \end{cases}$$

en er is precies één funktie $c(x)$ met

$$\begin{cases} c''(x) + c(x) = 0 \\ c(0) = 1 \\ c'(0) = 0 \end{cases}$$

We kunnen uit het bewijs van de stelling een expliciete uitdrukking voor $s(x)$ en $c(x)$ halen. Voor $s(x)$ geldt, in de notatie van het bewijs:

$$\alpha_1 = i, \alpha_2 = -i, d_0 = 0, d_1 = 1, h(x) = 0 .$$

Dan wordt $g(x) = E(ix)$, en

$$\begin{aligned} s(x) &= E(-ix) \int_0^x E(it)E(it)dt \\ &= E(-ix) \int_0^x E(2it)dt \\ &= \frac{1}{2i} E(-ix) [E(2it)]_0^x = \frac{1}{2i} E(-ix)\{E(2ix) - 1\} \\ &= \frac{1}{2i} \{E(ix) - E(-ix)\} . \end{aligned}$$

Op dezelfde manier kan worden afgeleid dat

$$c(x) = \frac{1}{2}\{E(ix) + E(ix)\} .$$

Deze beide uitdrukkingen voor $s(x)$ en $c(x)$ leveren veel informatie.
In de eerste plaats is gemakkelijk na te gaan dat $\overline{s(x)} = s(x)$ en $\overline{c(x)} = c(x)$, m.a.w. $s(x)$ en $c(x)$ zijn reëele getallen (met $\bar{z}$ geven we de complex geconjugeerde van een complex getal z aan). Ten tweede volgt onmiddellijk dat $s'(x) = c(x)$ en $c'(x) = -s(x)$. Dit impliceert dat $s(x)s'(x) + c(x)c'(x) = 0$, en na integreren volgt $s(x)^2 + c(x)^2 =$ constante. Vanwege $s(0) = 0, c(0) = 1$, is deze constante 1, dus $s(x)^2 + c(x)^2 = 1$.
Ook is uit beide uitdrukkingen voor $s(x)$ en $c(x)$ onmiddellijk duidelijk dat

$$s(-x) = -s(x) \quad \text{en} \quad c(-x) = c(x) .$$

We kunnen de uitdrukkingen voor $s(x)$ en $c(x)$ ook weergeven als $s(x) = \mathrm{Im}\,(E(ix))$ en $c(x) = \mathrm{Re}\,(E(ix))$, het imaginaire resp. reële deel van $E(ix)$.
De identiteit $E(i(x + y)) = E(ix)E(iy)$ kan dan herschreven worden tot

$$c(x + y) + i\ s(x + y) = (c(x) + is(x))(c(y) + is(y)) ,$$

waaruit onmiddellijk formules voor $s(x+y)$ en $c(x+y)$ volgen, en via $s(-y) = -s(y)$ en $c(-y) = s(y)$ volgen formules voor $s(x - y)$ en $c(x - y)$.

Zoals reeds eerder opgemerkt zijn s en c reëelwaardige funkties. We weten dat $c(0) = 1$. Stel nu dat $c(x) > 0$ voor alle $x > 0$.
Omdat $s'(x) = c(x)$ volgt dat s een monotoon stijgende funktie is voor $x \geq 0$. I.h.b. is dan $s(x) \geq s(1) > 0$ voor alle $x \geq 1$.
Dan geldt voor alle $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} 0 < c(x) &= c(1) + \int_1^x c'(t)\, dt \\ &= c(1) - \int_1^x s(t)\, dt \\ &\leq c(1) - (x-1)s(1)\ . \end{aligned}$$

Door x echter groot genoeg te nemen zal het rechterlid zeker negatief worden.
De aanname $c(x) > 0$ voor alle $x > 0$ is dus onjuist.
Er is dus een kleinste positieve nulpunt p voor de funktie c.
Uit de eerder afgeleide formules voor de funkties s en c kan dan gemakkelijk aangetoond worden dat

$s(p) = 1$
$s(2p) = 0$ en $c(2p) = -1$
$s(4p) = 0$ en $c(4p) = 1$
$s(x + 4p) = s(x)$ en $c(x + 4p) = c(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

§6. Funktionaalvergelijkingen.

Wat kun je zeggen over funkties f en g waarvoor de volgende drie eigenschappen gelden:

I $f(x)$ en $g(x)$ zijn voor alle reële x gedefinieerd,

II $f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$ voor alle reële x, y,

III $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = 1$.

Het beantwoorden van deze vraag is de inhoud van het artikel "De karakterisering van de goniometrische funkties door middel van een functionaalbetrekking" van J.C.H. Gerretsen, zie [16]. We volgen de lijn van zijn verhaal, en gaan daarbij eerst van de existentie van f en g uit.

Propositie 1
f is een even funktie, g een oneven funktie.
Bewijs.
Uit eigenschap II volgt dat $f(x-y) = f(y-x)$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}$; i.h.b. $f(x) = f(-x)$. Hieruit volgt, weer m.b.v. eigenschap II, dat $g(-x)g(-y) = g(x)g(y)$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}$. Op grond van eigenschap III is er een $y_0 \in \mathbb{R}$ met $g(y_0) \neq 0$. Dan kunnen we dus schrijven

$$g(x) = g(-x) \cdot \frac{g(-y_0)}{g(y_0)} \text{ , voor alle } x \in \mathbb{R} \text{ .}$$

Voor alle $x \neq 0$ geldt dan

$$\frac{g(x)}{x} = -\frac{g(-x)}{-x} \cdot \frac{g(-y_0)}{g(y_0)} \text{ .}$$

Neem links en rechts de limiet voor $x \to 0$, en er volgt

$$\frac{g(-y_0)}{g(y_0)} = -1 \text{ ,}$$

waaruit dan weer onmiddellijk volgt dat $g(x) = -g(-x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Gevolg
$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$

Propositie 2
$g(0) = 0, f(0) = 1$

Bewijs.
Uit het oneven zijn van g volgt dat $g(0) = 0$. Door dan in II $x = y = 0$ te nemen volgt dat $f(0) = f(0)^2$, dus $f(0) = 0$ of $f(0) = 1$. Als $f(0) = 0$, dan zou $f(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ (neem dan nl. $y = 0$ in II), en dat zou, weer m.b.v. II tot gevolg kunnen hebben dat $g(x) = 0$ voor alle x, in tegenspraak met III. Dus $f(0) = 1$.

Gevolg
$f^2(x) + g^2(x) = 1$

Propositie 3
f en g zijn continue funkties.

Bewijs.
$\lim_{y\to 0} g(y) = \lim_{y\to 0} \frac{g(y)}{y} \cdot y = 1 \cdot 0 = 0$
$f(y) = f(\frac{1}{2}y - (-\frac{1}{2}y)) = f^2(\frac{1}{2}y) - g^2(\frac{1}{2}y) = 1 - 2g^2(\frac{1}{2}y)$, dus $\lim_{y\to 0} f(y) = 1$
Dus $\lim_{y\to 0} f(x+y) = \lim_{y\to 0}\{f(x)f(y) - g(x)g(y)\} = f(x)$, m.a.w. f is een continue funktie.
Om de continuïteit van g aan te tonen maken we weer gebruik van een $y_0 \in \mathbb{R}$ met $g(y_0) \neq 0$.
We kunnen dan schrijven:

$$g(x) = \frac{1}{g(y_0)} \{f(x - y_0) - f(x)f(y_0)\}$$

en uit de rekenregels voor continue funkties volgt dan dat ook g continu is.

Propositie 4
f en g zijn differentieerbaar, en

$$f'(x) = -g(x)$$
$$g'(x) = f(x)$$

Bewijs.
Uit II en het gevolg van propositie 1 volgt gemakkelijk dat $f(x+y) - f(x-y) = -2g(x)g(y)$.
Als we nu x vervangen door $x + \frac{1}{2}h$, en y door $\frac{1}{2}h$, dan komt er

$f(x+h) - f(x) = -2g(x + \frac{1}{2}h)g(\frac{1}{2}h)$,

dus

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} -g(x + \tfrac{1}{2}h)\frac{g(\frac{1}{2}h)}{\frac{1}{2}h} = -g(x) .$$

m.a.w. $f'(x) = -g(x)$.
Door de uitdrukkingen voor $f(x+y)$ en $f(x-y)$ op te tellen in plaats van af te trekken krijgen we $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.
Differentiëren naar y levert

$$-g(x+y) + g(x-y) = -2f(x)g(y)$$

Schrijven we weer $x + \frac{1}{2}h$, resp. $\frac{1}{2}h$ in plaats van x, resp. y, dan volgt

$g(x+h) - g(x) = 2f(x + \frac{1}{2}h)g(\frac{1}{2}h)$, waaruit dan weer, op identieke wijze als hierboven, volgt dat $g'(x) = f(x)$.

Door differentiëren naar x van de uitdrukkingen voor $f(x+y)$ en $f(x-y)$ vinden we

Gevolg
$g(x+y) = g(x)f(y) + f(x)g(y)$,
$g(x-y) = g(x)f(y) - f(x)g(y)$.

Propositie 5
Er is een positief getal p met $f(p) = 0$. Verder geldt

$$\begin{array}{ll} g(p) = 1 & \\ f(2p) = -1 & , g(2p) = 0 \\ f(3p) = 0 & , g(3p) = -1 \\ f(4p) = 1 & , g(4p) = 0 \\ f(x+4p) = f(x) & , g(x+4p) = g(x)\,. \end{array}$$

Bewijs.
$f(0) = 1$
Stel dat $f(x) > 0$ voor alle $x > 0$. Uit $g'(x) = f(x)$ volgt dan dat g voor $x > 0$ een stijgende funktie is, en omdat $g(0) = 0$, volgt dat $g(x) > 0$ voor alle $x > 0$.
Ook: $g(2x) > g(x)$ voor $x > 0$
dus $2g(x)f(x) > g(x)$,
dus $f(x) > \frac{1}{2}$ voor alle $x > 0$.
Dit laatste kunnen we ook schrijven als $g'(x) > \frac{1}{2}$ voor alle $x > 0$, en met behulp van de middelwaardestelling volgt dan dat $g(x) > \frac{1}{2}x$ voor alle $x > 0$. Dit is echter in tegenspraak met $| g(x) | \leq 1$ voor alle x.
Er is dus een kleinste positieve waarde p met $f(p) = 0$. En omdat g op $(0,p)$ stijgend is, volgt dat $g(p) = 1$. De overige relaties volgen onmiddellijk uit de som-formules voor f en g.

Tot zover zijn we uitgegaan van de existentie van dergelijke funkties f en g. We gaan hier nu nader op in.

Propositie 6
Er zijn funkties f en g die aan de eigenschappen I, II en III voldoen.

Bewijs
De funkties f en g worden geconstrueerd door middel van successieve approximaties. Als eerste approximatie nemen we

$$\begin{array}{l} f_1(x) = 1 \\ g_1(x) = x \end{array}$$

Verder definiëren we inductief:

$$\begin{array}{ll} f'_{n+1}(x) & = -g_n(x) \\ f_{n+1}(0) & = 1 \end{array} \qquad \left(\text{dus } f_{n+1}(x) = 1 - \int_0^x g_n(t)dt\right)$$

$$\begin{aligned} g'_{n+1}(x) &= -f_{n+1}(x) \\ g_{n+1}(0) &= 0 \end{aligned} \qquad (\text{dus } g_{n+1}(x) = \int_0^x f_{n+1}(t)dt)$$

Met behulp van volledige inductie kan gemakkelijk bewezen worden dat

$$f_n(x) = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

$$g_n(x) = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

De machtreeksen $\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$ en $\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$ convergeren voor alle $x \in \mathbb{R}$, dus bestaat voor alle reële x

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ en } g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)\ .$$

Eigenschap III voor de funktie g is duidelijk. Blijft over eigenschap II. Uit de construktie van f en g is duidelijk, dat f en g differentieerbaar zijn, en dat $f'(x) = -g(x), g'(x) = f(x)$. Bekijk de funktie

$$\begin{aligned} &h(x) = f(x)f(x-a) + g(x)g(x-a) \\ &h'(x) = -g(x)f(x-a) - f(x)g(x-a) + f(x)g(x-a) + g(x)f(x-a) = 0 \end{aligned}$$

dus $h(x) = \text{constant} = h(0) = f(-a) = f(a)$ (uit de construktie van f is duidelijk dat het een even funktie is).
Dus $f(a) = f(x)f(x-a) + g(x)g(x-a)$.
Door $a = x - y$ te nemen volgt

$$f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)\ .$$

Propositie 7.
De funkties f en g zijn door de eigenschappen I, II, en III éénduidig bepaald.

Bewijs.[3]
Stel dat F en G ook funkties zijn die aan I, II en III voldoen (en derhalve ook aan alle eigenschappen uit de proposities 1 t/m 5). Noem $V = \{y \geq 0 \mid f(x) = F(x) \text{ en } g(x) = G(x) \text{ op } [0,y]\}$. We zullen nu aantonen dat $V = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Vanwege het even, resp. oneven zijn van de funkties f, F, resp. de funkties g, G volgt dan dat $f(x) = F(x)$ en $g(x) = G(x)$

[3]Dit is het bewijs uit het artikel van Gerretsen. Een alternatief bewijs kan als volgt gegeven worden. Als F en G ook funkties zijn die aan I, II en III voldoen dan voldoen F en G ook aan alle afgeleide eigenschappen in proposities 1 t/m 5. In het bijzonder is dan $f''(x)F(x) = f(x)F''(x) = 0$ voor alle reële x. Hieruit volgt dat $f'(x)F(x) - f(x)F'(x)$ een constante funktie is, en door invullen van $x = 0$ volgt dat $f'(x)F(x) - f(x)F'(x) = 0$ voor alle reële x. Dit impliceert dat $F(x) = \lambda f(x)$, en opnieuw door invullen van $x = 0$ volgt $\lambda = 1$. Analoog kan aangetoond worden dat $G(x) = g(x)$.

voor alle $x \in \mathbb{R}$.
Omdat $0 \in V$, geldt $V \neq \emptyset$.
Als $y \in V$, en $0 \leq y_1 \leq y$, dan ook $y_1 \in V$. V is een niet-lege, gesloten, samenhangende deelverzameling van $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
Stel dat $V \neq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, dan is $V = [0, b]$ voor zekere $b \geq 0$.
Kies nu $a = \max(0, b - \frac{1}{4})$, dan is $[a, b] \subset [0, b]$, en de lengte van het interval $[a, b + \frac{1}{4}]$ is maximaal $\frac{1}{2}$. Voor a geldt dan in elk geval $f(a) = F(a)$ en $g(a) = G(a)$.
De funktie $h(x) = | g(x) - G(x) |$ heeft op $[a, b + \frac{1}{4}]$ een maximum $M \geq 0$.
In de afschattingen die we nu zullen doen gebruiken we dat

$$f'(x) - F'(x) = G(x) - g(x)$$

en

$$g'(x) - G'(x) = f(x) - F(x)$$

Voor alle $x \in [a, b + \frac{1}{4}]$ geldt

$$\begin{aligned} | f(x) - F(x) | &= \left| \int_a^x (f'(t) - F'(t))dt \right| \\ &= \left| \int_a^x (G(t) - g(t))dt \right| \\ &\leq \int_a^x | G(t) - g(t) | \, dt \leq \tfrac{1}{2}M \, . \end{aligned}$$

Maar ook

$$\begin{aligned} h(x) &= | g(x) - G(x) | = \left| \int_a^x (g'(t) - G'(t))dt \right| \\ &= \left| \int_a^x (f(t) - F(t))dt \right| \\ &\leq \int_a^x | f(t) - F(t) | \, dt \leq \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}M = \tfrac{1}{4}M \, . \end{aligned}$$

M was het maximum van h op $[a, b + \frac{1}{4}]$, dus $M \leq \frac{1}{4}M$. Dit kan alleen als $M = 0$, dus $g(x) = G(x)$ op $[a, b + \frac{1}{4}]$. Uit $| f(x) - F(x) | \leq \frac{1}{2}M = 0$ volgt dat ook $f(x) = G(x)$ op $[a, b + \frac{1}{4}]$.
Maar dit betekent dat $b + \frac{1}{4} \in V$, in tegenspraak met $V = [0, b]$.
Conclusie: $V = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

De funkties cosinus en sinus worden dus volledig door de eigenschappen I, II en III gekarakteriseerd. Met name eigenschap II is daarbij een zeer krachtige; het is een gelijkheid die moet gelden voor alle waarden van de twee variabelen x en y. J.G. van der Corput schreef als vervolg op dit artikel van Gerretsen een tweetal artikelen in Euclides, zie[10] en [11]. Hij

onderzoekt met name wat er gebeurt als je uitgaat van vergelijkingen waarin slechts één va
riabele optreedt.
Zo bekijkt hij b.v. funkties f die voldoen aan

$$f(0) = 1 \ ,$$
$$f(x) = 2\ f(\tfrac{1}{2}x)^2 - 1 \text{ voor alle reële } x \ .$$

(denk aan de verdubbelingsformule voor de cosinus). Door deze twee eigenschappen is d
funktie f geenszins éénduidig vastgelegd; naast de funktie $f(x) = \cos x$ voldoet ook b.v. d
funktie $f(x) = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

§7. Complexe funkties

De machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, waarin z een complexe variabele is, heeft convergentiestraal ∞. De funktie $e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ is dus een analytische funktie voor alle $z \in \mathbb{C}$.
Complexe getallen worden voorgesteld door $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Om een voor de hand liggende reden vermijden we de poolvoorstelling van een complex getal: we willen niet van de bekende sinus- en cosinusfunkties gebruik maken. Wel associëren we met $z = a + bi$ het punt in het vlak (voorzien van een coördinatenstelsel), met coördinaten (a, b). Gemakkelijk is in te zien dat

$$
\begin{aligned}
&e(0) = 1 \\
&e'(z) = e(z)\ .
\end{aligned}
$$

Verder volgt door invullen in de machtreeks:

$$
\begin{aligned}
e(z+w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} z^m\, w^{n-m} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{z^m}{m!} \frac{w^{n-m}}{(n-m)!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \right) \\
&= e(z)\, e(w)\ .
\end{aligned}
$$

Door $w = -z$ te nemen volgt i.h.b. nog

$$
e(z)\ e(-z) = 1\ .
$$

Dus $e(z) \neq 0$ voor alle $z \in \mathbb{C}$, en $e(-z) = \frac{1}{e(z)}$. Met behulp van deze e-funktie definiëren we twee nieuwe funkties:

$$
c(z) = \frac{1}{2}(e(iz) + e(-iz)) \quad \text{en} \quad s(z) = \frac{1}{2i}\ (e(iz) - e(-iz))\ .
$$

Dus $e(iz) = c(z) + i\ s(z)$.
Duidelijk is dat c en s analytische funkties zijn voor alle $z \in \mathbb{C}$.
Voor de afgeleiden vinden we makkelijk:

$$
s'(z) = \frac{1}{2i}\ (i\ e(iz) + i\ e(-iz)) = c(z)
$$

$$
c'(z) = \frac{1}{2}(i\ e(iz) - i\ e(-iz)) = -s(z)\ .
$$

Uit de definitie volgt ook rechtstreeks dat

$$s(-z) = -s(z) \quad \text{en} \quad c(-z) = c(z)$$

Bovendien:

$$\begin{aligned} c^2(z) + s^2(z) &= (c(z) + i\ s(z))\ (c(z) - i\ s(z)) \\ &= e(iz) \cdot e(-iz) = 1 \end{aligned}$$

De eigenschap $e(i(w+z)) = e(iw)e(iz)$ gebruiken we om de som- formules voor $c(w+z)$ en $s(w+z)$ af te leiden.

$$\begin{aligned} e(i(w+z)) &= c(w+z) + i\ s(w+z)\ , \\ e(iw) \cdot e(iz) &= (c(w) + i\ s(w))\ (c(z) + i\ s(z)) \\ &= c(w)c(z) - s(w)s(z) + i\ (c(w)s(z) + s(w)c(z)) \end{aligned}$$

Dus

$$c(w+z) + i\ s(w+z) = c(w)c(z) - s(w)s(z) + i\ (c(w)s(z) + s(w)c(z))$$

Door nu dezelfde berekening uit te voeren voor $e(-i(w+z)) = e(-iw) \cdot e(-iz)$ vinden we

$$c(w+z) - i\ s(w+z) = c(w)c(z) - s(w)s(z) - i\ (c(w)s(z) + s(w)c(z))$$

Door deze beide uitdrukkingen nu op te tellen, resp. af te trekken vinden we de bekende formules voor $c(w+z)$ en $s(w+z)$.

Uit de machtreeks voor $e(z)$ kunnen machtreeksen voor $s(z)$ en $c(z)$ worden afgeleid:

$$\begin{aligned} s(z) &= \frac{1}{2i} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right\} \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n - (-i)^n}{n!}\ z^n\ , \end{aligned}$$

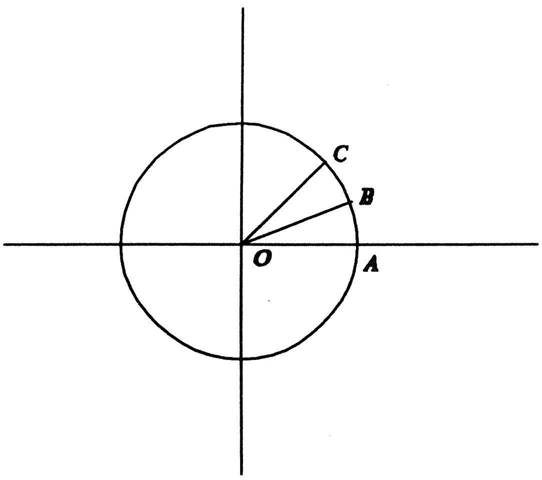
dus

$$s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\ .$$

Op dezelfde manier vinden we

$$c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}\ .$$

Uit deze machtreeksen volgt onmiddellijk dat voor reële x ook $s(x)$ en $c(x)$ reëel zijn. En omdat $c(x) + i\ s(x) = e(ix)$ geldt dus dat $c(x) =$ Re $(e(ix))$ en $s(x) =$ Im $(e(ix))$. In het bijzonder geldt dan ook $\mid e(ix) \mid = \sqrt{c(x)^2 + s(x)^2} = 1$, dus de getallen $e(ix)$ liggen voor reële x op de eenheidscirkel. We bekijken nu eerst de volgende situatie:



Getekend is de eenheidscirkel; punt B correspondeert met een complex getal $z = u + iv$, punt C met $z^2 = u^2 - v^2 + 2i\ uv$.

Figuur 45

Door de afstanden tussen $A = (1,0)$ en $B(u,v)$, en tussen B en $C = (u^2 - v^2, 2uv)$ uit te rekenen, en te gebruiken dat $u^2 + v^2 = 1$, vindt men gemakkelijk dat $AB = BC$. Maar dan is ook $\angle COB = \angle BOA$, m.a.w. bij kwadrateren wordt de hoek met de positieve x-as verdubbeld (zoals al eerder opgemerkt maken we geen gebruik van de poolvoorstelling).

$$e(i) = c(1) + i\ s(1)\ ,\ \text{waarbij}$$

$$c(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \quad \text{en} \quad s(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}$$

Door in deze reeksen de termen paarsgewijs bij elkaar te nemen kunnen we ze herschrijven tot reeksen met positieve termen; dus $c(1) > 0$ en $s(1) > 0$. Het complexe getal $e(i)$ correspondeert dus met een punt op de eenheidscirkel in het eerste kwadrant.
De funktie $f(x) = e(ix)$ is een continue funktie van $\mathbb{R}$ naar de eenheidscirkel met $f(0) = 1$. Bekijken we de rij getallen $f(1), f(2), f(4), \ldots$ dan kun je elk getal uit de vorige ontstaan denken door kwadrateren. Maar dan moet op een gegeven moment deze rij getallen het getal i op de eenheidscirkel "passeren". Vanwege de continuïteit van f treedt i dan ook als funktiewaarde op. Laat p het minimale positieve getal zijn met $f(p) = i$, anders geschreven $e(ip) = i$. Voor dit getal p is dan onmiddellijk een aantal eigenschappen af te leiden:

$$\begin{aligned}
&c(p) = \text{Re}\ (e(ip)) = 0 \text{ en } s(p) = \text{Im}\ (e(ip)) = 1\\
&e(2ip) = (e(ip))^2 = i^2 = -1 \text{ dus } c(2p) = -1 \text{ en } s(2p) = 0\\
&e(3ip) = -i\ ,\ \text{dus } c(3p) = 0 \text{ en } s(3p) = -1\\
&e(4ip) = 1\ ,\ \text{dus } c(4p) = 1 \text{ en } s(4p) = 0
\end{aligned}$$

En $e(i(z+4p)) = e(iz)e(4ip) = e(iz)$, dus $c(z+4p) = c(z)$ en $s(z+4p) = s(z)$ voor alle $z \in \mathbb{C}$.

§8. Oneindige produkten

De sinus-funktie kan ook gedefinieerd worden uitgaande van de nulpunten van deze funktie. Voordat we daar toe overgaan besteden we eerst aandacht aan een tweetal funkties die bij de berekeningen een rol zullen spelen.
Deze funkties zijn voor $x \in I\!R$, $x \notin Z\!\!Z$ als volgt gedefinieerd:

$$\varepsilon_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}_{e} \frac{1}{x+n} \quad , \quad \varepsilon_2(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$$

De funktie ε_2 is een voor alle $x \in I\!R \backslash Z\!\!Z$ differentieerbare funktie. Voor ε_1 is de zaak iets ingewikkelder. De reeks $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x+n}$ is niet convergent in de gebruikelijke zin. De toevoeging e bij het $\sum$-teken betekent

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}_{e} \frac{1}{x+n} = \lim_{M\to\infty} \sum_{n=-M}^{M} \frac{1}{x+n} .$$

We noemen dit Eisenstein-sommatie. Nu is $\varepsilon_1(x)$ ook een differentieerbare funktie;

$$\varepsilon_1'(x) = -\,\varepsilon_2(x) .$$

Eisenstein-sommatie zou vermeden kunnen worden door $\varepsilon_1(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2-n^2}$ te stellen. Voor het afleiden van verschillende identiteiten is het echter handiger Eisenstein-sommatie toe te passen. We noemen een aantal eigenschappen van ε_1 en ε_2.

1. $\varepsilon_1(x+m) = \varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x+m) = \varepsilon_2(x)$ voor alle $m \in Z\!\!Z$. Dit volgt onmiddellijk uit de definitie van beide funkties.

2. Voor $|x| < 1$, $x \neq 0$ geldt

$$\varepsilon_1(x) = \frac{1}{x} - \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m} x^{2m-1} \; , \text{ waarbij } \gamma_{2m} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}}$$

   Dit kan worden afgeleid door

$$\frac{1}{x+n} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+(\frac{x}{n})} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{x^k}{n^{k+1}}$$

   te substitueren in de reeks voor $\varepsilon_1(x)$ (er komt alleen een bijdrage voor oneven machten van x, de overige termen vallen weg).
   In het bijzonder zal in het vervolg het getal $\gamma_2 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ een rol spelen.

3. $(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_1(y))^2 = 2\,\varepsilon_1(x+y)\,(\varepsilon_1(x)+\varepsilon_1(y)) + \varepsilon_2(x) + \varepsilon_2(y)$.
   In [23] wordt uitvoerig beschreven hoe Eisenstein deze identiteit bewijst. We geven hier alleen de hoofdlijnen.

Noem

$$\begin{array}{ll} p = x + m & q = y - m \\ p' = x + m - n & q' = y + n - m \end{array}$$

Dan is

$$\frac{1}{pq'} + \frac{1}{p'q} = \frac{1}{p+q'}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q'}\right) + \frac{1}{p'+q}\left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q}\right)$$

We noemen het rechterlid even A. Voor $n \neq 0$ is

$$\frac{1}{pp'} + \frac{1}{qq'} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{q'}\right)$$

Noem hier het rechterlid B.
In het geval $n = 0$ nemen we $B = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}$. Er geldt dan

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}\right) = A + B\ ,$$

waarbij linker-en rechterlid van n en m afhangen.
Deze identiteit kan nu aan beide kanten eerst over m gesommeerd worden, en vervolgens kan Eisenstein-sommatie over n toegepast worden. Door voorzichtig en handig de dan verkregen identiteit om te vormen kan de beoogde formule bewezen worden.

4. $\varepsilon_1(x)^2 = \varepsilon_2(x) - 3\gamma_2$.
Beschouw namelijk de identiteit in 3. in het bijzonder voor $|y| < 1$. $y \neq 0$. Linker- en rechterlid zijn dan te schrijven als reeksen in machten van y, beginnend met y^{-2}.

B.v. $\varepsilon_2(y) = -\varepsilon_1'(y) = y^{-2} + \sum_{m=1}^{\infty}(2m-1)\gamma_{2m}y^{2m-2}$,

$$\varepsilon_1(x+y) = \varepsilon_1(x) + \frac{\varepsilon_1'(x)}{1!}y + \frac{\varepsilon_1''(x)}{2!}y^2 + \ldots$$

(deze funktie is analytisch rond $y = 0$) etc.

Door vervolgens in beide reeksen links en rechts de termen zonder y te vergelijken volgt bovenstaande formule.

5. $\varepsilon_1(x)\,\varepsilon_1(x+\frac{1}{2}) = -3\gamma_2$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, $x \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.
Neem namelijk in formule 3 nu $y = \frac{1}{2}$. Gemakkelijk is in te zien dat $\varepsilon_1(\frac{1}{2}) = 0$.

$$\varepsilon_2(\frac{1}{2}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\frac{1}{2}+n)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2}$$

$$\gamma_2 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{4n^2}\ ,$$

dus $\varepsilon_2(\frac{1}{2}) = 3\gamma_2$.
Bovenstaande identiteit volgt nu eenvoudig uit 3.

We definiëren nu funkties g en f. De funktie g heeft nulpunten voor alle $x \in \mathbb{Z}$:

$$g(x) = x \prod_{n=-\infty}^{\infty}{}_e' \left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

Het accent geeft aan dat $n \neq 0$, en de toevoeging e heeft een betekenis analoog aan die bij de Eisenstein-sommatie:

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty}{}_e' = \lim_{M \to \infty} \prod_{n=-M}^{M}{}'$$

Uit de definitie van g volgt onmiddellijk

$$g(-x) = -g(x) \ .$$

En $g(x+1) = -g(x)$, want

$$\begin{aligned}(x+1) \prod_{n=-M}^{M}{}' \left(1 + \frac{x+1}{n}\right) &= (x+1) \prod_{n=-M}^{M}{}' \left(\frac{x+n+1}{n}\right) \\ &= \frac{x+M+1}{x-M} \cdot x \prod_{n=-M}^{M}{}' \left(1 + \frac{x}{n}\right) ,\end{aligned}$$

en neem dan links en rechts de limiet voor $M \to \infty$. In het bijzonder is dan

$$g(x+2) = g(x) \ .$$

Het verband met de funktie $\varepsilon_1(x)$ wordt als volgt duidelijk:
voor $0 < x < 1$ geldt $\ln g(x) = \ln x + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}_e' \ln(1 + \frac{x}{n})$, dus

$$\begin{aligned}\frac{g'(x)}{g(x)} &= \frac{1}{x} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}_e' \frac{1}{1+\frac{x}{n}} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}_e \frac{1}{n+x} = \varepsilon_1(x) ,\end{aligned}$$

ofwel $g'(x) = \varepsilon_1(x) g(x)$.
Vanwege $g(x+1) = -g(x)$ en $\varepsilon_1(x+1) = \varepsilon_1(x)$ geldt dit dan ook voor alle $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.

Definieer nu voor $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$:

$$f(x) = \varepsilon_1(x) g(x) \ .$$

Nu is

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x} - \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m}x^{2m-1}\right\} x \prod_{n=-\infty}^{\infty}{}'_{e} \left(1+\frac{x}{n}\right) = 1 \text{ , en}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x+1)g(x+1) = \lim_{x\to 0} -\varepsilon_1(x)g(x) = -1$$

We definiëren daarom

$$f(n) = (-1)^n \text{ voor } n \in \mathbb{Z} \ .$$

Dan is f een continue funktie op $\mathbb{R}$, met

$$\begin{aligned}
&f(\tfrac{1}{2}) = 0\\
&f(x+1) = -f(x)\\
&f(-x) = f(x) \ .
\end{aligned}$$

De differentieerbaarheid van f voor $x \notin \mathbb{Z}$ volgt onmiddellijk uit de differentieerbaarheid va ε_1 en g. Ook voor $x = 0$ (en dus ook voor alle $x \in \mathbb{Z}$) is f differentieerbaar, met afgeleide Voor $x \notin \mathbb{Z}$ volgt

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \varepsilon_1'(x)g(x) + \varepsilon_1(x)g'(x)\\
&= -\varepsilon_2(x)g(x) + \varepsilon_1(x)^2 g(x)\\
&= 3\gamma_2 g(x) \ .
\end{aligned}$$

En gezien bovenstaande geldt dit ook voor $x \in \mathbb{Z}$. We hebben nu dus twee differentieerba funkties f en g met o.a.

$$\begin{aligned}
&g(x) = 0 \text{ voor alle } x \in \mathbb{Z}\\
&f(x+\tfrac{1}{2}) = 0 \text{ voor alle } x \in \mathbb{Z}\\
&g'(x) = f(x) \text{ en } f'(x) = -3\gamma_2 g(x)
\end{aligned}$$

Door de funkties f en g een beetje te veranderen kunnen deze laatste identiteiten symmetri scher gemaakt worden.
Noem

$$p = \sqrt{3\gamma_2}$$

$$s(x) = p\, g(\frac{x}{p}) \quad , \quad c(x) = f(\frac{x}{p})$$

Uit het voorafgaande volgen dan een reeks eigenschappen voor de funkties s en c:

$$\begin{aligned}
&s(x) = 0 \text{ voor } x = kp \ , \quad k \in \mathbb{Z}\\
&c(x) = 0 \text{ voor } x = \tfrac{1}{2}p + k\,p \ , \quad k \in \mathbb{Z}\\
&s(\tfrac{1}{2}p + kp) = (-1)^k \ , \quad k \in \mathbb{Z}\\
&s(x+2kp) = s(x) \ , \quad c(x+2kp) = c(x) \ , \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

De afgeleiden zijn gemakkelijk te bepalen:

$$s'(x) = p \cdot g'\left(\frac{x}{p}\right) \cdot \frac{1}{p} = f\left(\frac{x}{p}\right) = c(x)$$

$$c'(x) = f'\left(\frac{x}{p}\right) \cdot \frac{1}{p} = -p^2 g\left(\frac{x}{p}\right) \cdot \frac{1}{p} = -s(x)$$

Met behulp van deze afgeleiden kunnen gemakkelijk nieuwe identiteiten worden afgeleid.
Uit $s(x)s'(x) + c(x)c'(x) = 0$ volgt $s(x)^2 + c(x)^2 = 1$.
Als $h(x) = s(x)c(a-x) + c(x)s(a-x)$, dan is $h'(x) = 0$, dus $h(x) = \text{constant} = h(0) = s(a)$.
Door vervolgens $a = x + y$ te nemen volgt

$$s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y)\ .$$

Formules voor $s(x-y), c(x+y)$ en $c(x-y)$ volgen dan onmiddellijk.
We bekijken nog een tweetal gevolgen van de som-formule voor de funktie s.
In de eerste plaats volgt uit deze formule het volgende verband tussen de funkties s en c:

$$s(x + \frac{1}{2}p) = c(x)\ .$$

En ten tweede kunnen we nu een uitdrukking voor $c(x)$ als oneindig produkt afleiden. Immers $s(x) = 2s(\frac{1}{2}x)c(\frac{1}{2}x)$, en omdat

$$s(x) = x \prod_{n=-\infty}^{\infty}{}'_{e} \left(1 + \frac{x}{pn}\right) = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{p^2n^2}\right)\ , \text{ dus}$$

$$s(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4p^2n^2}\right)\ , \text{ is dus}$$

$$c(\frac{1}{2}x) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{p^2(2n+1)^2}\right)\ , \text{ ofwel}$$

$$c(x) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{p^2(2n+1)^2}\right)\ .$$

§9. Sinus en cosinus volgens Bourbaki

In deze paragraaf zullen we laten zien hoe de funkties cosinus en sinus in [7] op formele wijze ingevoerd worden. Uitgangspunt daarbij is $\mathbb{R}$ als topologische optelgroep. In het algemeen heet een groep G een topologische groep als G voorzien is van een topologie zò dat de afbeeldingen $(x, y) \mapsto xy$ en $x \mapsto x^{-1}$ continu zijn. Als we spreken over homomorfismen tussen topologische groepen zullen we steeds continue homomorfismen bedoelen.

We bekijken eerst ondergroepen van $\mathbb{R}$.
Een ondergroep H van $\mathbb{R}$ heet discreet als elk element van H een omgeving heeft die geen andere elementen van H bevat. Zo is b.v. $\mathbb{Z}$ een discrete ondergroep, maar $\mathbb{Q}$ niet. De ondergroepen van $\mathbb{R}$ kunnen als volgt gekarakteriseerd worden.

Propositie 1
H is een echte ondergroep van $\mathbb{R}$, d.w.z. $H \neq \mathbb{R}$.

1) Als H niet discreet is dan is H overal dicht in $\mathbb{R}$.

2) Als H gesloten is dan is H van de vorm $a\,\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$.

Bewijs

1) Er is een element $h \in H$ zó dat elke omgeving van h nog andere elementen van H bevat. Bij elke $\varepsilon > 0$ is er dus een $h' \in H$, $h \neq h'$ met $h - \varepsilon < h' < h + \varepsilon$. Doordat $n(h - h') \in H$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$ betekent dit dat elk interval in $\mathbb{R}$ elementen van H bevat, dus H ligt overal dicht in $\mathbb{R}$.

2) Als H gesloten is moet H op grond van 1) discreet zijn. Neem aan dat $H \neq \{0\}$. Dan is er $h \in H$, $h > 0$. Omdat H discreet is liggen er in het gesloten interval $[0, h]$ slechts eindig veel elementen van H. Laat a het kleinste positieve element van H zijn. Voor elke $x \in H$ is dan $x - [\frac{x}{a}]\, a \in H$ ($[\frac{x}{a}]$ is het gehele deel van $\frac{x}{a}$), en omdat $0 \leq x - [\frac{x}{a}]a < a$ geldt $x = [\frac{x}{a}]a$.
Dus geldt $H = a\,\mathbb{Z}$.

Als H een ondergroep is van $\mathbb{R}$ dan voorzien we de quotiënt-groep $\mathbb{R}/H$ van de zgn. quotiënt-topologie. Dit betekent dat de kanonieke afbeelding $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/H$ continu is, en tevens dat het beeld van een open deelverzameling van $\mathbb{R}$ een open deelverzameling van $\mathbb{R}/H$ is.
Als $H = a\,\mathbb{Z}$ dan noteren we $\mathbb{R}/H$ ook wel als $\mathbb{R}$ mod $a\,\mathbb{Z}$, of soms ook wel als $\mathbb{R}$ mod a. Gemakkelijk is in te zien dat voor alle $a, b \neq 0$ de ondergroepen $a\,\mathbb{Z}$ en $b\,\mathbb{Z}$ van $\mathbb{R}$ isomorf zijn: de afbeelding $x \mapsto \frac{b}{a}x$ is een automorfisme van $\mathbb{R}$ dat $a\,\mathbb{Z}$ op $b\,\mathbb{Z}$ afbeeldt. Voor alle $a, b \neq 0$ zijn de groepen $\mathbb{R}$ mod a en $\mathbb{R}$ mod b dus isomorf; in het bijzonder zijn deze dan isomorf met $\mathbb{R}$ mod 1.
Dus:

Propositie 2
Als H een echte gesloten ondergroep is van $\mathbb{R}$ dan is $\mathbb{R}/H$ isomorf met $\mathbb{R}$ mod 1.

Van belang is verder ook de volgende eigenschap van de groep $\mathbb{R}$.

Propositie 3
Als G een topologische groep is , I een open interval in $\mathbb{R}$ met $0 \in I$, $f : I \to G$ een continue afbeelding met de eigenschap dat $f(x+y) = f(x)f(y)$ voor alle $x, y \in I$ met $x + y \in I$, dan is f op precies één manier voortzetbaar tot een homomorfisme van $\mathbb{R}$ naar G.

Bewijs
Kies $x \in \mathbb{R}$. Er is $n \in \mathbb{N}$ met $\frac{1}{n}x \in I$.
Definieer $\bar{f}(x) = \left(f(\frac{1}{n}x)\right)^n$.
We laten eerst zien dat de definitie van $\bar{f}$ onafhankelijk van de keuze van n is.
Laat $\frac{1}{n}x \in I$ en $\frac{1}{m}x \in I$.
Dan is $\frac{1}{nm}x \in I$ en $m\left(\frac{1}{nm}x\right) \in I$ dus (op grond van de veronderstelde eigenschap van f voor elementen van I):

$$f(\tfrac{1}{n}x) = f\left(m(\tfrac{1}{nm}x)\right) = \left(f(\tfrac{1}{nm}x)\right)^m.$$

Op dezelfde manier volgt $f(\frac{1}{m}x) = \left(f(\frac{1}{nm}x)\right)^n$.
Dus $\left(f(\frac{1}{n}x)\right)^n = \left(f(\frac{1}{nm}x)\right)^{nm} = \left(f(\frac{1}{m}x)\right)^m$, waarmee is aangetoond dat de definitie van $\bar{f}(x)$ onafhankelijk van de keuze van n is.
De continuïteit van $\bar{f}$ volgt gemakkelijk uit de continuïteit van f.
Voor $x, y \in I$ geldt $f(x)f(y) = f(x+y) = f(y+x) = f(y)f(x)$, en hieruit is gemakkelijk af te leiden dat

$$\bar{f}(x+y) = \bar{f}(x)\bar{f}(y) \text{ voor alle } x, y \in \mathbb{R}\ .$$

En omdat $\bar{f}$ een homomorfisme moet zijn volgt de uniciteit uit de constructie van $\bar{f}$.

We bepalen nu welke homomorfismen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mod 1 en $\mathbb{R}$ mod 1 $\to \mathbb{R}$ mod 1 er mogelijk zijn.
Allereerst $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dus f is continu en $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Voor alle $n \in \mathbb{Z}$ volgt $f(n) = n\, f(1)$, en uit $f(1) = f(q \cdot \frac{1}{q}) = q\, f(\frac{1}{q})$ volgt $f(\frac{1}{q}) = \frac{1}{q}f(1)$ voor alle $q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$. Dan is ook $f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}f(1)$ voor alle $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. En omdat f ook continu is moet voor alle $r \in \mathbb{R}$ gelden $f(r) = r\, f(1)$. We zien dat elk homomorfisme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ van de vorm $f(x) = a\, x$ is; als $a \neq 0$ is het tevens een automorfisme (d.w.z. een inverteerbaar homomorfisme).
Met $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mod 1 geven we verder het kanonieke homomorfisme $\varphi(r) = r + \mathbb{Z}$ aan.
Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mod 1 een homomorfisme zijn.
$U = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ is een open omgeving van 0 in $\mathbb{R}$. $\varphi(U)$ is een open omgeving van $0 + \mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$ mod 1.
$f^{-1}(\varphi(U))$ is dan weer een open omgeving van 0 in $\mathbb{R}$. Er is dan $\delta > 0$ zó dat $(-\delta, \delta) \subset f^{-1}(\varphi(U))$.
We construeren nu een funktie $g : (-\delta, \delta) \to U$ als volgt.
Voor elke $x \in (-\delta, \delta)$ is er precies één $u \in U$ met $f(x) = \varphi(u)$. Definieer $g(x) = u$. Dan is g

een continue funktie. Neem $x, y \in (-\delta, \delta)$ zó dat ook $x + y \in (-\delta, \delta)$

$$\begin{array}{lll} g(x) = u & \text{met} & f(x) = \varphi(u) \\ g(y) = v & \text{met} & f(y) = \varphi(v) \\ g(x+y) = w & \text{met} & f(x+y) = \varphi(w) \end{array}$$

Nu is $\varphi(w) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(u+v)$ dus $\varphi(w-u-v) = 0 + \mathbb{Z}$
En omdat $u, v, w \in U = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ volgt hieruit $u + v = w$. Dus $g(x+y) = g(x) + g(y)$ voc alle $x, y \in (-\delta, \delta)$ met $x + y \in (-\delta, \delta)$.
Volgens propositie 3 is g dan voort te zetten tot een homomorfisme $\bar{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, en dus i $\bar{g}$ van de vorm $\bar{g}(x) = a\,x$. Voor $x \in (-\delta, \delta)$ geldt $f(x) = \varphi(u) = \varphi(g(x)) = \varphi(a\,x)$, en du moet voor alle $x \in \mathbb{R}$ gelden $f(x) = \varphi(a\,x)$.
We hebben hiermee afgeleid dat elk homomorfisme $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mod 1 van de vorm $x \mapsto \varphi(a\,x)$, $a \in \mathbb{R}$, is.
We kunnen nu gemakkelijk alle homomorfismen $\mathbb{R}$ mod 1 $\to \mathbb{R}$ mod 1 bepalen.
Laat namelijk ψ zo'n homomorfisme zijn. Dan is $\psi \circ \varphi$ een homomorfisme $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mod 1, e dus geldt volgens het voorafgaande $\psi \circ \varphi(x) = \varphi(a\,x)$, anders gezegd $\psi(x + \mathbb{Z}) = a\,x + \mathbb{Z}$ voo alle $x + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}$ mod 1. Gemakkelijk is nu ook in te zien dat ψ een automorfisme is dan e slechts dan als $a = \pm 1$. Als nl. $a = 0$ is ψ duidelijk geen automorfisme, en als $a \neq 0$, $a \neq \pm$ ook niet want dan geldt b.v. $\psi(0 + \mathbb{Z}) = \psi(\frac{1}{a} + \mathbb{Z})$, dus dan is ψ niet één-éénduidig.

We vatten het voorafgaande samen in de volgende propositie.

Propositie 4

1) Elk homomorfisme $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is van de vorm $x \mapsto a\,x$; zo'n homomorfisme is een automor fisme als $a \neq 0$.
2) Elk homomorfisme $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mod 1 is van de vorm $x \mapsto \varphi(a\,x)$.
3) Elk homomorfisme $\mathbb{R}$ mod 1 $\to \mathbb{R}$ mod 1 is van de vorm $x + \mathbb{Z} \mapsto a\,x + \mathbb{Z}$; zo' homomorfisme is een automorfisme dan en slechts dan als $a = \pm 1$.

De volgende eigenschap geldt algemeen voor topologische groepen.

Propositie 5
Als H een open ondergroep is van een topologische groep G dan is H ook gesloten.

Bewijs
Stel dat $a \in G$ verdichtingspunt van H is.
De omgeving $a\,H$ van a bevat dan een element $b \in H$, dus $b = a\,h$ met $h \in H$, dus $a = b\,h^{-1} \in H$, m.a.w. H bevat al z'n verdichtingspunten. Dus H is gesloten.

Twee topologische groepen G en G' heten locaal isomorf als er een homeomorfisme f van een omgeving V van e op een omgeving V' van e' (e en e' zijn de neutrale elementen van G en G') is met de eigenschappen:

$$\text{als } x, y \in V \text{ en } x\,y \in V \text{ dan } f(xy) = f(x)f(y)$$

$$\text{als } x', y' \in V' \text{ en } x'\, y' \in V' \text{ dan } f^{-1}(x'y') = f^{-1}(x')f^{-1}(y').$$

Als één van deze topologische groepen $\mathbb{R}$ is blijken we over daarmee locaal isomorfe groepen meer te kunnen zeggen.

Propositie 6
Als G een samenhangende groep is, en G is locaal isomorf met $\mathbb{R}$, dan is G isomorf met $\mathbb{R}$ of met $\mathbb{R}$ mod 1.

Bewijs
Laat $f : V \to V'$ een locaal isomorfisme van een omgeving V van $0 \in \mathbb{R}$ op een omgeving V' van $e \in G$ zijn. We mogen aannemen dat V een open interval is. Uit propositie 3 volgt dan dat f is uit te breiden tot een homomorfisme $\bar{f} : \mathbb{R} \to G$.
Nu is $\bar{f}(V) = V'$ open in G. Voor $x \in \mathbb{R}$ geldt $\bar{f}(x\,V) = \bar{f}(x)V'$, en dit is een open omgeving van $\bar{f}(x)$ binnen $\bar{f}(\mathbb{R})$, m.a.w. $\bar{f}(\mathbb{R})$ is een open ondergroep van G. Volgens propositie 5 is $\bar{f}(\mathbb{R})$ dan ook gesloten, en omdat G samenhangend is volgt hieruit dat $\bar{f}(\mathbb{R}) = G$.
Dan geldt $\mathbb{R}/\text{Kern } \bar{f} \cong G$, waarbij Kern $\bar{f} = \{x \in \mathbb{R} \mid \bar{f}(x) = e\}$. Omdat G locaal isomorf is met $\mathbb{R}$, $\{0\}$ een gesloten deelverzameling van $\mathbb{R}$ is, is $\{e\}$ een gesloten deelverzameling van G. Uit de continuïteit van $\bar{f}$ volgt dan dat Kern $\bar{f}$ een gesloten ondergroep is van $\mathbb{R}$, en m.b.v. propositie 1 resulteert dit in Kern $\bar{f} = a\,\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$.
$G \cong \mathbb{R}/a\,\mathbb{Z}$, en we zien dat $G \cong \mathbb{R}$ als $a = 0$ en $G \cong \mathbb{R}$ mod 1 als $a \neq 0$.

In het hele verhaal over de formele invoering van de functies cosinus en sinus is de volgende stelling essentieel. Het bewijs is echter vrij technisch en we volstaan met een schets.

Propositie 7
Als G een topologische groep is zó dat een omgeving van $e \in G$ homeomorf is met een open interval in $\mathbb{R}$ dan is G locaal isomorf met $\mathbb{R}$.

Bewijs
Laat f een homeomorfisme van een omgeving U van e op een open interval I in $\mathbb{R}$ zijn. M.b.v. dit homeomorfisme kunnen we een afbeelding construeren die aan de eisen voor een locaal isomorfisme voldoet. Neem eerst een omgeving V van e zó dat $V \cdot V \subset U$, $V^{-1} = V$ en V is samenhangend.
Deel V op in twee stukken
$V_1 = \{x \in V \mid f(x) > f(e)\}$
$V_2 = \{x \in V \mid f(x) < f(e)\}$
Voor $x, y \in V_1$ definiëren we

$$g(x, y) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid f(y^n) < f(x)\}$$

Men kan nu bewijzen dat voor alle x, $y \in V_1$ het getal $g(x, y)$ bestaat.
Kies vervolgens $a \in V_1 (a \neq e)$ vast en definieer voor $x \in V_1$:

$$h(x) = \lim_{r \downarrow f(e)} \frac{g(x,\, f^{-1}(r))}{g(a,\, f^{-1}(r))}$$

Hierbij is $r \in f(V_1)$. Voor elk zo'n r zijn $g(x,\, f^{-1}(r))$ en $g(a,\, f^{-1}(r))$ natuurlijke getallen, en

$h(x)$ is dus limiet van een rij rationale getallen. Men kan nu bewijzen dat voor elke $x \in V_1$ deze limiet bestaat, dat de funktie h continu is in V_1 en dat voor $x, y \in V_1$ met $x\,y \in V_1$ geldt $h(xy) = h(x) + h(y)$.
Vervolgens wordt h tot heel V uitgebreid door

$$h(e) = 0$$
$$h(x) = -h(x^{-1}) \text{ voor } x \in V_2 \,.$$

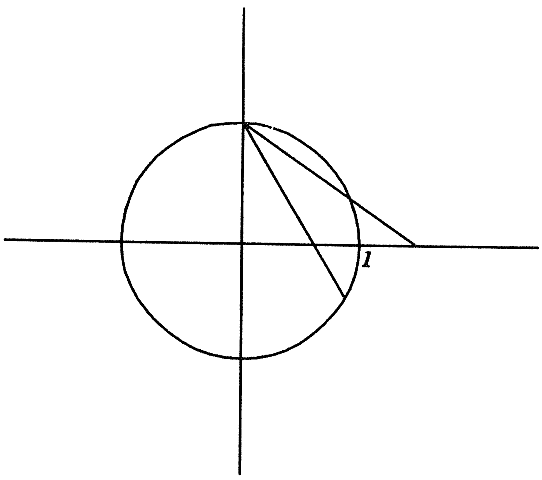
Dan voldoet de funktie h aan de eisen voor een locaal isomorfisme.

We passen propositie 7 toe op een speciale groep, de vermenigvuldigingsgroep van de complexe getallen met absolute waarde 1:

$$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Deze groep is een compacte samenhangende topologische groep. Gemakkelijk is in te zien dat een open omgeving van $1 \in \mathcal{U}$ homeomorf is met een open interval in $\mathbb{R}$, b.v. via de stereografische projektie

$$p(x, y) = \frac{x}{1-y} \quad :$$



Figuur 46

Dus is $\mathcal{U}$ locaal isomorf met $\mathbb{R}$; omdat $\mathcal{U}$ samenhangend is volgt uit propositie 6 dat $\mathcal{U}$ isomorf is met $\mathbb{R}$ of met $\mathbb{R}$ mod 1. De compactheid van $\mathcal{U}$ levert dat $\mathcal{U} \cong \mathbb{R}$ mod 1.
Er zijn twee mogelijke isomorfismen van $\mathbb{R}$ mod 1 op $\mathcal{U}$. Want stel dat ν_1 en ν_2 isomorfismen zijn, dan is $\nu_1^{-1} \circ \nu_2$ een automorfisme van $\mathbb{R}$ mod 1 op zichzelf. Volgens propositie 4 geldt dan $\nu_1^{-1} \circ \nu_2(x) = x$ of $\nu_1^{-1} \circ \nu_2(x) = -x$, m.a.w. $\nu_2(x) = \nu_1(x)$ of $\nu_2(x) = \nu_1(-x)$. We willen nu één ismorfisme van $\mathbb{R}$ mod 1 op $\mathcal{U}$ aanwijzen. We kunnen dit doen door het beeld van

één van de twee elementen in $\mathbb{R}$ mod 1 met orde 4 vast te leggen.
We definiëren nu:
$\nu : \mathbb{R} \bmod 1 \to \mathcal{U}$ is het ismorfisme waarvoor geldt $\nu(\frac{1}{4} + \mathbb{Z}) = i$
Dan ligt verder vast

$$\nu(\tfrac{1}{2} + \mathbb{Z}) = -1$$

$$\nu(\tfrac{3}{4} + \mathbb{Z}) = -i$$

Noem $\varepsilon = \nu \circ \varphi$, dan is ε dus een surjectief homomorfisme van $\mathbb{R}$ op $\mathcal{U}$.
Kies $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
De afbeelding $x \mapsto \varepsilon(a\,x)$ is dan ook een surjectief homomorfisme van $\mathbb{R}$ op $\mathcal{U}$ (en omgekeerd is volgens propositie 4 ook elk homomorfisme van deze vorm). Een dergelijk homomorfisme zullen we gebruiken om cosinus- en sinus-funkties te definiëren. Om wat nettere formules te krijgen gaan we uit van een homomorfisme $x \mapsto \varepsilon\left(\dfrac{x}{a}\right) = \varepsilon\left(\dfrac{1}{a}\,x\right)$ (a een vast gekozen reëel getal $\neq 0$)
Voor elke $x \in \mathbb{R}$ is $\varepsilon\left(\dfrac{x}{a}\right)$ een complex getal met absolute waarde 1.
Noem nu $\quad \operatorname{Re} \varepsilon\left(\dfrac{x}{a}\right) = \cos_a(x)$

$$\operatorname{Im} \varepsilon\left(\frac{x}{a}\right) = \sin_a(x)\ .$$

De funkties $x \mapsto \cos_a(x)$ en $x \mapsto \sin_a(x)$ zijn continue reële funkties.
Voor deze funkties kunnen we onmiddellijk een aantal eigenschappen afleiden.
Uit $\varepsilon(0) = 1$ volgt

$$\cos_a(0) = 1 \text{ en } \sin_a(0) = 0$$

Uit $\varepsilon\left(\dfrac{x}{a}\right) \in \mathcal{U}$ volgt

$$\cos_a^2(x) + \sin_a^2(x) = 1$$

$$-1 \leq \cos_a(x) \leq 1 \text{ en } -1 \leq \sin_a(x) \leq 1$$

De funktie $x \mapsto \varepsilon\left(\dfrac{x}{a}\right)$ is periodiek met periode a:

$$\varepsilon\left(\frac{1}{a}(x+a)\right) = \varepsilon\left(\frac{x}{a}\right)\ , \text{ dus}$$

$$\begin{aligned} \cos_a(x+a) &= \cos_a(x) \text{ en} \\ \sin_a(x+a) &= \sin_a(x) \end{aligned}$$

Het feit dat $x \mapsto \varepsilon(a\,x)$ een homomorfisme is, $\varepsilon\left(\dfrac{1}{a}(x+y)\right) = \varepsilon\left(\dfrac{x}{a}\right)\,\varepsilon\left(\dfrac{y}{a}\right)$, heeft tot gevolg dat

$$\cos_a(x+y) = \cos_a(x)\cos_a(y) - \sin_a(x)\sin_a(y)$$

$$\sin_a(x+y) = \sin_a(x)\cos_a(y) + \cos_a(x)\sin_a(y)\,.$$

Ook volgt uit het feit dat $x \mapsto \varepsilon\left(\frac{x}{a}\right)$ een homomorfisme is dat $\varepsilon\left(\frac{1}{a}(-x)\right) = \left(\varepsilon(\frac{x}{a})\right)^{-1}$, du

$$\cos_a(-x) = \cos_a(x) \text{ en } \sin_a(-x) = -\sin_a(x)\,.$$

We rekenen nog enkele bijzondere funktiewaarden uit.

$$\varepsilon\left(\frac{1}{a}\cdot\tfrac{1}{4}a\right) = \varepsilon(\tfrac{1}{4}) = i, \text{ dus}$$

$$\cos_a\left(\tfrac{1}{4}a\right) = 0 \quad \text{en} \quad \sin_a(\tfrac{1}{4}a) = 1\,.$$

$$\varepsilon\left(\frac{1}{a}\cdot\tfrac{3}{4}a\right) = \varepsilon(\tfrac{3}{4}) = -i, \text{ dus}$$

$$\cos_a\left(\tfrac{3}{4}a\right) = 0 \quad \text{en} \quad \sin_a(\tfrac{3}{4}a) = -1\,.$$

De aldus ingevoerde funkties $x \mapsto \cos_a(x)$ en $x \mapsto \sin_a(x)$ kunnen gebruikt worden om ee hoekmaat vast te leggen. We gaan daarbij uit van het hoekbegrip zoals dat reeds eerder i ingevoerd in §3 uit hoofdstuk 1.
Allereerst merken we op dat $\mathcal{O}^+ \cong \mathcal{U}$. Immers de elementen van $\mathcal{O}^+$ worden t.o.v. ee orthonormale basis $\{e_1, e_2\}$ voorgesteld door 2×2-matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ met } \alpha^2+\beta^2 = 1\,.$$

De afbeelding $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \mapsto \alpha + \beta i$ geeft dan een isomorfisme van $\mathcal{O}^+$ op $\mathcal{U}$.
Laat $\angle(H, D)$ een hoek zijn, in de notatie zoals eerder werd ingevoerd.
$\angle(H, D)$ correspondeert eenduidig met een $u \in \mathcal{O}^+$ en dus met een complex getal $\alpha+\beta i \in \mathcal{U}$.
Kies nu $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.
Er is dan precies één getal $r \in \mathbb{R}$ aan te wijzen met $0 \leq r < a$, $\cos_a(r) = \alpha$ en $\sin_a(r) = \beta$.
Definieer nu

$$\mu_a\left(\angle(H, D)\right) = r$$

Dan is dit een maat voor $\angle(H, D)$.
Van enkele bijzondere hoeken is het nu gemakkelijk de maat te bepalen:

$$\mu_a\left(\angle(H, V)\right) = \tfrac{1}{4}a$$
$$\mu_a\left(\angle(H, -H)\right) = \tfrac{1}{2}a$$
$$\mu_a\left(\angle(H, -V)\right) = \tfrac{3}{4}a$$

Deze hoekmaat μ_a is "additief". Als nl. $\mu_a\Big(\angle(H, D)\Big) < \frac{1}{2}a$ en $\mu_a\Big(\angle(D, D')\Big) < \frac{1}{2}a$ geldt $\mu_a\Big(\angle(H, D) + \angle(D, D')\Big) = \mu_a\Big(\angle(H, D)\Big) + \mu_a\Big(\angle(D, D')\Big)$. Dit volgt uit de definitie van μ_a en de volgende matrix-vermenigvuldiging:

$$\begin{pmatrix} \cos_a(r) & -\sin_a(r) \\ \sin_a(r) & \cos_a(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos_a(t) & -\sin_a(t) \\ \sin_a(t) & \cos_a(t) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos_a(r+t) & -\sin_a(r+t) \\ \sin_a(r+t) & \cos_a(r+t) \end{pmatrix}$$

Als $\mu_a\Big(\angle(H, D)\Big) + \mu_a\Big(\angle(D, D')\Big) \geq a$ moeten we wat voorzichtiger zijn. Uit de reeds eerder vermelde periodiciteit met periode a van de funkties $\cos_a$ en $\sin_a$ blijkt dat in dat geval geldt

$$\mu_a\Big(\angle(H, D) + \angle(D, D')\Big) = \mu_a\Big(\angle(H, D)\Big) + \mu_a\Big(\angle(D, D')\Big)(\text{ mod } a)$$

§10. Het getal π

In de paragrafen 1 t/m 9 werden steeds de funkties sinus en cosinus op een andere manier geïntroduceerd. Ook kwam steeds het getal π op een andere wijze naar voren. We komen hier nu op terug.
Het getal π is van oudsher de constante verhouding tussen omtrek en diameter van een cirkel. In de paragrafen 2 en 3 treedt π in deze rol op. In §3 is dat onmiddellijk duidelijk: de lengte van een kwart van de eenheidscirkel is gelijk aan $\frac{1}{2}\pi$. In §2 wordt er een verband gelegd tussen de omtrek van de eenheidscirkel en de keuze van een geschikte hoekmaat. In verband met eigenschappen van de funkties sinus en cosinus blijkt het daar zinvol een hoekmaat zo te kiezen dat een "hoek helemaal rond" overeen komt met de omtrek van de eenheidscirkel. Dus 360° wordt gelijkgesteld aan 2π eenheden; deze eenheid wordt dan radiaal genoemd. Deze keuze voor een eenheid voor de hoekmeting heeft tot gevolg dat

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

Deze limiet is van belang bij het afleiden van eigenschappen van de funkties sinus en cosinus. Ook in §6 speelt deze limiet een belangrijke rol.
Deze situatie, waarin je voor een bepaalde eenheid kiest ten einde uit een limiet 1 als uitkomst te krijgen is enigszins vergelijkbaar met een tamelijk gangbare methode om het getal e te definiëren. Als je nl. funkties $f_a(x) = a^x$ $(a \in \mathbb{R}, a > 0)$ beschouwt dan is e precies dat getal waarvoor $f_e'(0) = 1$, anders geschreven als

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 .$$

De definities van sinus en cosinus in de paragrafen 4, 5, 7 en 8 staan ver van meetkundige interpretaties, en het getal π speelt daarin dan ook een rol die geen enkel verband meer heeft met de omtrek van een cirkel.
In de paragrafen 4 en 5, en eigenlijk ook in 7, gaat het om een continuïteits-argument. In paragrafen 4 en 5 is de reële funktie $\cos x$ een continue funktie met $\cos 0 > 0$ en $\cos 2 < 0$. De funktie heeft dus op $[0,2]$ een kleinste nulpunt en we noemen dat $\frac{1}{2}\pi$. En in §7 gaat het om de complex-waardige funktie e^{ix} $(x \in \mathbb{R})$; deze funktie windt de positieve reële as op continue wijze rond de eenheidscirkel in het complexe vlak, en $\frac{1}{2}\pi$ is dan de waarde waar voor de eerste keer het getal i gepasseerd wordt.
Bij de opzet van §8 blijkt het getal

$$\sqrt{6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}$$

een speciale rol te spelen: het heeft alle bekende eigenschappen van π met betrekking tot de funkties sinus en cosinus (periodiciteit, nulpunten). Dit betekent dat de identiteit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} ,$$

die gewoonlijk wordt afgeleid met behulp van Fourier-theorie, hier gebruikt wordt om het getal π te definiëren. De §8 geeft aanleiding tot nog een bijzonderheid met betrekking tot het getal π. Uit

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

volgt door $x = \frac{1}{2}$ te nemen dat

$$\frac{1}{2}\pi = \lim_{m\to\infty} \frac{2.2.4.4.......(2m)(2m)}{1.3.3.......(2m-1)(2m-1)(2m+1)}$$

Dit is de produkt-formule van Wallis.
De uitdrukking

$$\frac{1}{2}\pi = \lim_{m\to\infty} \frac{2^{4m}(m!)^4}{(2m!)^2(2m+1)}$$

kan in verband gebracht worden met een kans-experiment. Noem $P(m)$ de kans dat bij opgooien van $2m$ munten er m keer kop boven komt. Dan is

$$P(m) = 2^{-2m}\begin{pmatrix} 2m \\ m \end{pmatrix} = 2^{-2m}\,\frac{2m!}{(m!)^2}$$

De bovenstaande uitdrukking kan dus geschreven worden als

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{(2m+1)(P(m))^2} = \frac{1}{2}\pi \,,$$

ofwel als

$$\lim_{m\to\infty} (2m+1)(P(m))^2 = \frac{2}{\pi} \,,$$

een manier om π experimenteel te bepalen! Dit laatste lijkt enigszins op de oplossing van het zogenaamde naalden-probleem van Buffon. Werp een naald met lengte l willekeurig op een planken vloer. De planken hebben allemaal een breedte d. De kans dat de naald over minstens één naad valt is dan gelijk aan $\frac{2l}{\pi d}$. Als je $l = d$ neemt is dus ook hier de uitkomst $\frac{2}{\pi}$.

Referenties

1. Beckmann P., *A history of* π, The Golem Press, Boulder, Colorado, (1982).
2. Bemmelen Th. van, e.a., *Sigma 1*, Wolters-Noordhof, Groningen, (1987).
3. Bodegraven D. van. e.a., *Wiskundielijn 1b*, Jacob Dijkstra, Groningen, (z.j.).
4. Bos W. J., *Grondslag voor de meetkunde*, Meulenhoff, Amsterdam, (1967).
5. Bos W. J., P. E. Lepoeter, *Wegwijzer in de Meetkunde, deel 1*, Meulenhoff, Amsterdar (1959).
6. Bosteels G., J. Horwart, *Intuïtuive meetkunde, Inleiding tot de meetkunde*, Wesma Charlier, Namen, (1948).
7. Bourbaki N., *Eléments de Mathématique, première partie, Les structures fondamental de l'analyse, Livre III, Topologie générale, chap. VIII, nombres complexes*, Hermann C^ie^, Paris, (1947).
8. Bourbaki N., *Eléments de Mathématique, première partie, Les structures fondamental de l'analyse, Livre II, Algèbre, chap. IX, formes sesquilinéaires et formes quadratique* Hermann, Paris, (1959).
9. Busard H.L.L., Nicole Oresme, *Quaestiones super Geometriam Euclides*, diss. Leide (1961).
10. Corput J. G. van der, *Goniometrische functies gekarakteriseerd door een functionaal b trekking*, Euclides **17** (1940), pp. 55-57.
11. Corput J. G. van der, *A remarkable family*, Euclides **18** (1941), pp. 50-78.
12. Courant R., F. John, *Introduction to Calculus and Analysis*, Interscience Publisher Chichester, (1974).
13. Dop A. van, A. van Haselen, *Nieuwe Vlakke Meetkunde 1*, Wolters, Groningen, (1956).
14. Dijksterhuis E. J. *De Elementen van Euclides*, Noordhoff, Groningen, (1930).
15. Freudenthal H., *Mathematics as an educational task*, D. Reidel Publishing Compan Dordrecht, (1973).
16. Gerretsen J. C. H., *De karakterisering van de goniometrische functies door middel va een funktionaalbetrekking*, Euclides **16**, (1939), pp. 92-99.
17. Hilbert D., *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig, (1909).
18. Jacobs H. J., e.a., *Moderne Wiskunde 1*, Wolters-Noordhof, Groningen, (1983).
19. Kemme S., *Uitleggen van Wiskunde, OW & OC*, Utrecht, (1990).
20. Thijn A. van, M. L. Kobus, *Van Thijn's Wiskundige leergang, Leerboek der Vlakke Mee kunde, Eerste deel*, Wolters, Groningen, (1952).

21. Verdonk J. J., *Petrus Ramus en de Wiskunde*, Van Gorcum en Comp. N.V., Assen, (1966).

22. Waerden B. L. van der, *De logische grondslagen der Euclidische meetkunde*, Noordhoff, Groningen, (1937).

23. Weil A., *Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker*, Springer-Verlag, Berlin, (1976).

MC SYLLABI

1.1 F. Göbel, J. van de Lune. *Leergang besliskunde, deel 1: wiskundige basiskennis.* 1965.

1.2 J. Hemelrijk, J. Kriens. *Leergang besliskunde, deel 2: kansberekening.* 1965.

1.3 J. Hemelrijk, J. Kriens. *Leergang besliskunde, deel 3: statistiek.* 1966.

1.4 G. de Leve, W. Molenaar. *Leergang besliskunde, deel 4: Markovketens en wachttijden.* 1966.

1.5 J. Kriens, G. de Leve. *Leergang besliskunde, deel 5: inleiding tot de mathematische besliskunde.* 1966.

1.6a B. Dorhout, J. Kriens. *Leergang besliskunde, deel 6a: wiskundige programmering 1.* 1968.

1.6b B. Dorhout, J. Kriens, J.Th. van Lieshout. *Leergang besliskunde, deel 6b: wiskundige programmering 2.* 1977.

1.7a G. de Leve. *Leergang besliskunde, deel 7a: dynamische programmering 1.* 1968.

1.7b G. de Leve, H.C. Tijms. *Leergang besliskunde, deel 7b: dynamische programmering 2.* 1970.

1.7c G. de Leve, H.C. Tijms. *Leergang besliskunde, deel 7c: dynamische programmering 3.* 1971.

1.8 J. Kriens, F. Göbel, W. Molenaar. *Leergang besliskunde, deel 8: minimaxmethode, netwerkplanning, simulatie.* 1968.

2.1 G.J.R. Förch, P.J. van der Houwen, R.P. van de Riet. *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 1.* 1967.

2.2 L. Dekker, T.J. Dekker, P.J. van der Houwen, M.N. Spijker. *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 2.* 1968.

3.1 H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 1.* 1967.

3.2 H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 2.* 1968.

3.3 H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 3.* 1968.

4 H.A. Lauwerier. *Representaties van groepen.* 1968.

5 J.H. van Lint, J.J. Seidel, P.C. Baayen. *Colloquium discrete wiskunde.* 1968.

6 K.K. Koksma. *Cursus ALGOL 60.* 1969.

7.1 *Colloquium moderne rekenmachines, deel 1.* 1969.

7.2 *Colloquium moderne rekenmachines, deel 2.* 1969.

8 H. Bavinck, J. Grasman. *Relaxatietrillingen.* 1969.

9.1 T.M.T. Coolen, G.J.R. Förch, E.M. de Jager, H.G.J. Pijls. *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 1.* 1970.

9.2 W.P. van den Brink, T.M.T. Coolen, B. Dijkhuis, P.P.N. de Groen, P.J. van der Houwen, E.M. de Jager, N.M. Temme, R.J. de Vogelaere. *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 2.* 1970.

10 J. Fabius, W.R. van Zwet. *Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening.* 1970.

11 H. Bart, M.A. Kaashoek. H.G.J. Pijls, W.J. de Schipper, J. de Vries. *Colloquium halfalgebra's en positieve operatoren.* 1971.

12 T.J. Dekker. *Numerieke algebra.* 1971.

13 F.E.J. Kruseman Aretz. *Programmeren voor rekenautomaten; de MC ALGOL 60 vertaler voor de EL X8.* 1971.

14 H. Bavinck, W. Gautschi, G.M. Willems. *Colloquium approximatietheorie.* 1971.

15.1 T.J. Dekker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 1.* 1972.

15.2 P.A. Beentjes, K. Dekker, H.C. Hemker, S.P.N. van Kampen, G.M. Willems. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 2.* 1973.

15.3 P.A. Beentjes, K. Dekker, P.W. Hemker, M. van Veldhuizen. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 3.* 1975.

16.1 L. Geurts. *Cursus programmeren, deel 1: de elementen van het programmeren.* 1973.

16.2 L. Geurts. *Cursus programmeren, deel 2: de programmeertaal ALGOL 60.* 1973.

17.1 P.S. Stobbe. *Lineaire algebra, deel 1.* 1973.

17.2 P.S. Stobbe. *Lineaire algebra, deel 2.* 1973.

17.3 N.M. Temme. *Lineaire algebra, deel 3.* 1976.

18 F. van der Blij, H. Freudenthal, J.J. de Iongh, J.J. Seidel, A. van Wijngaarden. *Een kwart eeuw wiskunde 1946-1971, syllabus van de vakantiecursus 1971.* 1973.

19 A. Hordijk, R. Potharst, J.Th. Runnenburg. *Optimaal stoppen van Markovketens.* 1973.

20 T.M.T. Coolen, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, E. Slagt. *ALGOL 60 procedures voor begin- en randwaardeproblemen.* 1976.

21 J.W. de Bakker (red.). *Colloquium programmacorrectheid.* 1975.

22 R. Helmers, J. Oosterhoff, F.H. Ruymgaart, M.C.A. van Zuylen. *Asymptotische methoden in de toetsingstheorie; toepassingen van naburigheid.* 1976.

23.1 J.W. de Roever (red.). *Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 1.* 1976.

23.2 J.W. de Roever (red.). *Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 2.* 1977.

24.1 P.J. van der Houwen. *Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen, deel 1: eenstapsmethoden.* 1974.

25 *Colloquium structuur van programmeertalen.* 1976.

26.1 N.M. Temme (ed.). *Nonlinear analysis, volume 1.* 1976.

26.2 N.M. Temme (ed.). *Nonlinear analysis, volume 2.* 1976.

27 M. Bakker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, S.J. Polak, M. van Veldhuizen. *Colloquium discretiseringsmethoden.* 1976.

28 O. Diekmann, N.M. Temme (eds.). *Nonlinear diffusion problems.* 1976.

29.1 J.C.P. Bus (red.). *Colloquium numerieke programmatuur, deel 1A, deel 1B.* 1976.

29.2 H.J.J. te Riele (red.). *Colloquium numerieke programmatuur, deel 2.* 1977.

30 J. Heering, P. Klint (red.). *Colloquium programmeeromgevingen.* 1983.

31 J.H. van Lint (red.). *Inleiding in de coderingstheorie.* 1976.

32 L. Geurts (red.). *Colloquium bedrijfsystemen.* 1976.

33 P.J. van der Houwen. *Berekening van waterstanden in zeeën en rivieren.* 1977.

34 J. Hemelrijk. *Oriënterende cursus mathematische statistiek.* 1977.

35 P.J.W. ten Hagen (red.). *Colloquium computer graphics.* 1978.

36 J.M. Aarts, J. de Vries. *Colloquium topologische dynamische systemen.* 1977.

37 J.C. van Vliet (red.). *Colloquium capita datastructuren.* 1978.

38.1 T.H. Koornwinder (ed.). *Representations of locally compact groups with applications, part I.* 1979.

38.2 T.H. Koornwinder (ed.). *Representations of locally compact groups with applications, part II.* 1979.

39 O.J. Vrieze, G.L. Wanrooy. *Colloquium stochastische spelen.* 1978.

40 J. van Tiel. *Convexe analyse.* 1979.

41 H.J.J. te Riele (ed.). *Colloquium numerical treatment of integral equations.* 1979.

42 J.C. van Vliet (red.). *Colloquium capita implementatie van programmeertalen.* 1980.

43 A.M. Cohen, H.A. Wilbrink. *Eindige groepen (een inleidende cursus).* 1980.

44 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium numerical solution of partial differential equations.* 1980.

45 P. Klint (red.). *Colloquium hogere programmeertalen en computerarchitectuur.* 1980.

46.1 P.M.G. Apers (red.). *Colloquium databankorganisatie, deel 1.* 1981.

46.2 P.G.M. Apers (red.). *Colloquium databankorganisatie, deel 2.* 1981.

47.1 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60: general information and indices.* 1981.

47.2 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 1: elementary procedures; vol. 2: algebraic evaluations.* 1981.

47.3 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3A: linear algebra, part I.* 1981.

47.4 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3B: linear algebra, part II.* 1981.

47.5 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 4: analytical evaluations; vol. 5A: analytical problems, part I.* 1981.

47.6 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 5B: analytical problems, part II.* 1981.

47.7 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 6: special functions and constants; vol. 7: interpolation and approximation.* 1981.

48.1 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). *Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 1.* 1982.

48.2 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). *Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 2.* 1982.

49 T.H. Koornwinder (ed.). *The structure of real semisimple Lie groups.* 1982.

50 H. Nijmeijer. *Inleiding systeemtheorie.* 1982.

51 P.J. Hoogendoorn (red.). *Cursus cryptografie.* 1983.

CWI SYLLABI

1 Vacantiecursus 1984: *Hewet - plus wiskunde.* 1984.

2 E.M. de Jager, H.G.J. Pijls (eds.). *Proceedings Seminar 1981-1982. Mathematical structures in field theories.* 1984.

3 W.C.M. Kallenberg, et al. *Testing statistical hypotheses: worked solutions.* 1984.

4 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 1.* 1984.

5 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 2.* 1984.

6 P.J.M. Bongaarts, J.N. Buur, E.A. de Kerf, R. Martini, H.G.J. Pijls, J.W. de Roever. *Proceedings Seminar 1982-1983. Mathematical structures in field theories.* 1985.

7 Vacantiecursus 1985: *Variatierekening.* 1985.

8 G.M. Tuynman. *Proceedings Seminar 1983-1985. Mathematical structures in field theories, Vol.1 Geometric quantization.* 1985.

9 J. van Leeuwen, J.K. Lenstra (eds.). *Parallel computers and computations.* 1985.

10 Vacantiecursus 1986: *Matrices.* 1986.

11 P.W.H. Lemmens. *Discrete wiskunde: tellen, grafen, spelen en codes.* 1986.

12 J. van de Lune. *An introduction to Tauberian theory: from Tauber to Wiener.* 1986.

13 G.M. Tuynman, M.J. Bergvelt, A.P.E. ten Kroode. *Proceedings Seminar 1983-1985. Mathematical structures in field theories, Vol.2.* 1987.

14 Vacantiecursus 1987: *De personal computer en de wiskunde op school.* 1987.

15 Vacantiecursus 1983: *Complexe getallen.* 1987.

16 P.J.M. Bongaarts, E.A. de Kerf, P.H.M. Kersten. *Proceedings Seminar 1984-1986. Mathematical structures in field theories, Vol.1.* 1988.

17 F. den Hollander, H. Maassen (eds.). *Mark Kac seminar on probability and physics. Syllabus 1985-1987.* 1988.

18 Vacantiecursus 1988. *Differentierekening.* 1988.

19 R. de Bruin, C.G. van der Laan, J.R. Luyten, H.F. Vogt. *Publiceren met LATEX.* 1988.

20 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 1.* 1988.

21 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 2.* 1988.

22 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 3.* 1988.

23 J. van Mill, G.Y. Nieuwland (eds.). *Proceedings van het symposium wiskunde en de computer.* 1989.

24 P.W.H. Lemmens (red.). *Bewijzen in de wiskunde.* 1989.

25 Vacantiecursus 1989: *Wiskunde in de Gouden Eeuw.* 1989.

26 G.G.A. Bäuerle et al. *Proceedings Seminar 1986-1987. Mathematical structures in field theories.* 1990.

27 Vacantiecursus 1990: *Getallentheorie en haar toepassingen.* 1990.

28 Vacantiecursus 1991: *Meetkundige structuren.* 1991.

29 A.G. van Asch, F. van der Blij. *Hoeken en hun Maat.* 1992.